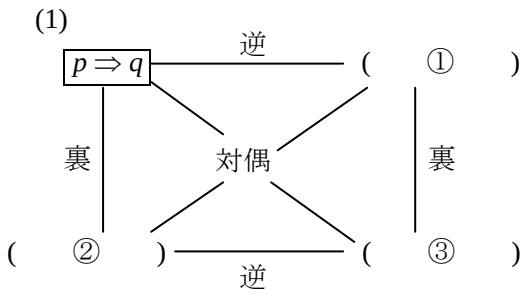
数暗攻 ～命題と論理，平面図形～　数学A

1　命題 $p \Rightarrow q$ がある。

(1)



(2)　命題「$p \Rightarrow q$」と，その(　④　)の真偽は一致する。

(3)　命題「$x=2 \Rightarrow x^2=4$」に対して，

その逆は，(　⑤　)

真偽は(　　)

裏は，(　⑥　)

真偽は(　　)

対偶は，(　⑦　)

真偽は(　　)

2　n は整数とする。次の命題を証明せよ。

n^2 が偶数ならば，n は偶数である。

証明）

この命題の対偶は，

(　①　)…Ⓐ

奇数 n は，ある整数 k を用いて，

$n=$(　②　)と表せるから，

$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1$

=(　③　)

ここで，$2k^2+2k$ は整数であるから，

n^2 は奇数である。

よって，命題Ⓐは真であり，(　④　)

3　n を整数とする。

n^2 を 3 で割ると，割り切れるか，または 1 余ることを証明せよ。

<point>
整数 n を 3 つの型に分類
$\Rightarrow n=$①(　　，　，　　(k は整数))とおく

証明）　k を整数とする。

(ⅰ)　$n=3k$ のとき

$n^2=(3k)^2=9k^2=3\cdot 3k^2$

∴　n^2 は 3 で割り切れる。

(ⅱ)　$n=$(　②　)のとき

$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=$(　③　)

∴　n^2 は 3 で割ると 1 余る。

(ⅲ)　$n=3k+2$ のとき

$n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=$(　④　)

∴　n^2 は 3 で割ると 1 余る。

(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ)より

n^2 を 3 で割ると，割り切れるか，

または 1 余る。

4

<point>　ド･モルガンの法則
$\overline{p \text{かつ} q}$　⇔　(　①　)
(　②　)　⇔　$\overline{p}$ かつ $\overline{q}$

次の条件または命題の否定をいえ。

(1)　$1 \leqq x < 3$

(2)　整数 m，n はともに奇数

(3)　ある実数 x があって，$x^2=-1$ である。

<point>　「すべて」の否定は「ある」，
「ある」の否定は「すべて」

1

(1)

①　$q \Rightarrow p$

②　$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$

③　$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$

(2)④　対偶

(3)

⑤　$x^2=4 \Rightarrow x=2$　偽

⑥　$x \neq 2 \Rightarrow x^2 \neq 4$　偽

⑦　$x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq 2$　真

2

①　n が奇数ならば，n^2 は奇数である。

②　$2k+1$

③　$2(2k^2+2k)+1$

④　もとの命題も真である。

3

①　$3k$，$3k+1$，$3k+2$

②　$3k+1$

③　$3(3k^2+2k)+1$

④　$3(3k^2+4k+1)+1$

4

①　$\overline{p}$ または $\overline{q}$

②　$\overline{p \text{または} q}$

(1)　$x<1$　または　$x \geqq 3$

(2)　整数 m，n の少なくとも一方は偶数

(3)　すべての実数 x について，$x^2 \neq -1$ である。

5　次の命題の真偽を調べ，偽のときは反例をいえ。

(1)　$x^2=16$　ならば，$x=4$

(2)　a，b は自然数とする。

$ab \neq 6$　ならば，$a \neq 2$　または　$b \neq 3$

(3)　$x^2>y^2$　ならば，$x>y$

(4)　$x>2$　ならば，$x>1$

<point>
条件 p，q の満たすものの集合を P，Q とする
「$p \Rightarrow q$」が真　⇔　(　①　)

6　「必要条件」「十分条件」「必要十分条件」「必要条件でも十分条件でもない」のいずれかをいえ。

(1)　ΔABC が二等辺三角形であることは，ΔABC が正三角形であるための(　①　)。

(2)　$|x|<2$ は，$x<3$ であるための(　②　)。

(3)　$xy=1$ は，$x=1$ であるための(　③　)。

(4)　$x^2=y^2$ は $|x|=|y|$ であるための(　④　)。

7　［背理法］

$\sqrt{3}$ が無理数であることを用いて，

$4-\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ。

証明）

$4-\sqrt{3}$ が(　①　)

つまり，r を有理数として，

$4-\sqrt{3}=r$ とすると，$\sqrt{3}=4-r$

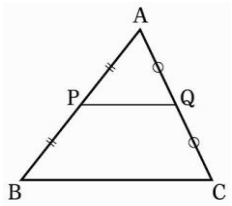
ここで，r は有理数より，

$4-r$ は(　②　)　となり，

このことは，(　③　)

よって，$4-\sqrt{3}$ は無理数である。

8　［中点連結定理］



ΔABCで 2 辺 AB，AC の中点を P，Q とすると，(　①　)が成り立つ。

9　［外心・内心・重心］

外心…三角形の 3 辺の(　①　)の交点。

外心は，三角形の(　②　)の中心である。

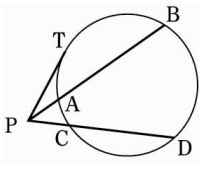
内心…三角形の 3 つの内角の(　③　)の交点。

内心は三角形の(　④　)の中心である。

重心…三角形の 3 本の(　⑤　)の交点。

重心は中線を(　⑥　)に内分する。

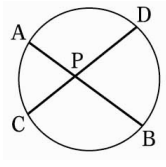
10　［方べきの定理］［トレミーの定理］



左図において，

方べきの定理は，

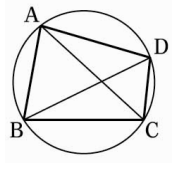
①(　＝　＝　)



左図において，

方べきの定理は，

②(　＝　)



左図において，

トレミーの定理は，

③(　　)

5

(1)　偽　(反例　$x=-4$)

(2)　対偶は，

$a=2$ かつ $b=3 \Rightarrow ab=6$

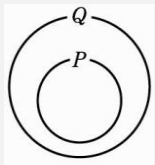
よって真

(3)　偽

(反例 $x=-6$，$y=1$)

(4)　真

①　$P \subset Q$



6

①　必要条件

②　十分条件

③　必要条件でも十分条件でもない

④　必要十分条件

7

①　有理数であると仮定する

②　有理数

③　$\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾する。

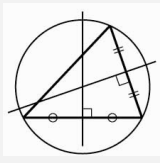
8

①　$PQ /\!/ BC$，$PQ=\frac{1}{2}BC$

9

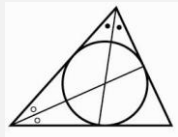
①　垂直二等分線

②　外接円



③　二等分線

④　内接円



⑤　中線

⑥　2 : 1

外辺内角と覚えよ！

10

方べきの定理

①　$PT^2=PA\cdot PB=PC\cdot PD$

方べきの定理

②　$PA\cdot PB=PC\cdot PD$

トレミーの定理

③　$AB\cdot CD+AD\cdot BC$
$=AC\cdot BD$