算数・数学は、身近な暮らしの中で役立ちます

見つめ直すと、みえてきます

事象を数理的に解釈する

PROFILE

〈監修〉

矢部 敏昭 やべ としあき（鳥取大学副学長、附属図書館長）

1955年千葉県生まれ。東京都小学校教諭、お茶の水女子大学附属小学校教諭を経て、鳥取大学に勤務する。現在までに、鳥取大学附属教育実践総合センター長をはじめ、附属中学校長、附属学校部長、地域学部長を歴任。日本数学教育学会理事、日本学術会議連携会員、鳥取県教育審議会会長等を務める。

〈連載第9回執筆〉

神保 勇児 じんぼ ゆうじ（東京学芸大学附属大泉小学校教諭）

1981年、宮崎県出身。奈良教育大学大学院卒。大阪府小学校教諭を経て現職。

田代 勝 たしろ まさる（東京学芸大学附属大泉小学校教諭）

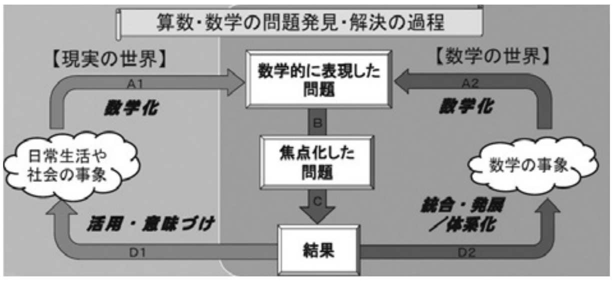
1968年静岡県生まれ。東京学芸大学卒、加藤学園暁秀初等学校（静岡県沼津市）を経て現職。

峰野 宏祐 みねの こうすけ（東京学芸大学附属世田谷中学校教諭）

1986年神奈川県生まれ。横浜国立大学大学院教育学研究科卒。神奈川県立柏陽高等学校教諭を経て現職。

① 子どもたちはこんな場面を算数・数学を使って考えたことがありますか？

新しい学習指導要領では、下記のような「算数・数学の学習過程のイメージ」が示されています。



小学校学習指導要領解説 算数編 p.8より

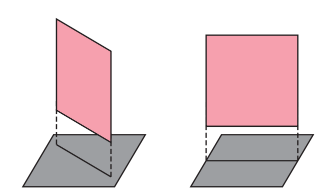
ここでは、まず左のサイクルの【現実の世界】として、マンホールのふたを扱い、円の理解の深まりについて述べていきます。

小学5年では対角線や辺の長さについての学習を経て、図形の見方が豊かになっていきます。そのとき、「どうしてマンホールのふたは三角形や四角形ではだめなのか」と問いを投げかけてみては、どうでしょう。

型抜きを使い、長方形、正方形、三角形、円で、マンホールに見立てた図形を子どもたちに作らせます。そして、同じ形の穴に通していきます。ふたの向きを変えながら、ストンと穴に落ちてしまわないかを確認するのです。子どもたちは、三角形や四角形は落ちてしまうけれど、円は落ちないと気付きます。なぜ、円はどの向きにしても落ちないのでしょうか。子どもたちは考え始めます。

> C：正方形はふたを回して斜めにすると、正方形の一辺の長さよりも対角線の方が長くなるので落ちます。
>
> C：正三角形も、三角形の一辺の長さより、三角形の高さが短いので、回すと落ちてしまいます。

次に子どもたちは、円だとどうして落ちないのかについて説明を始めました。



C：ふたの円の直径はどこも同じ長さだからです。

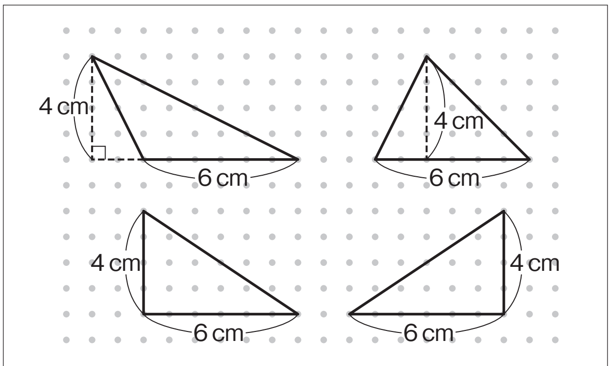
C：円の直径が同じ長さなので、回してどの向きにふたを置いても穴に落ちません。

子どもたちは、直径の長さの学習をもとに、円をどの向きに置いても落ちないのかと考えることを通して、小学3年で既習である「コンパスでかいたようなまるい形を円という」について、見つめ直す機会になります。また、正方形の対角線と辺の長さや正三角形の高さと辺の長さについても見つめ直すことができました。

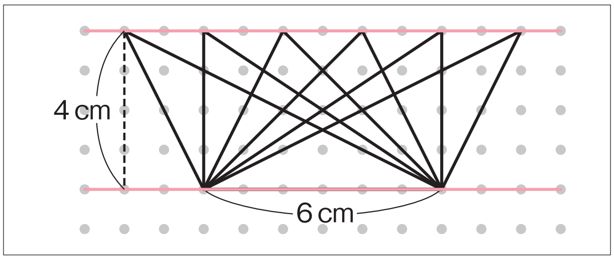
このように、一度学習したことを新たな学びを通じて数理的に解釈していくことは、算数・数学での学びが深まることにつながります。これから、その具体例を紹介していきます。

② 算数・数学がこんなにつながります

「算数・数学の学習過程のイメージ」のうち、右のサイクルの【数学の世界】についての例を、小学5年の三角形の面積の学習で考えてみましょう。三角形の面積公式「底辺×高さ÷2=面積」の学習を終えた後に、6×4÷2=12となる三角形を子どもたちにかかせてみるとどうでしょう。下のような三角形を次々とかき出します。

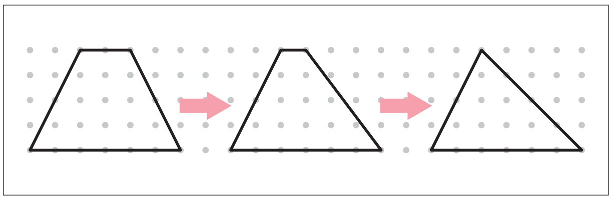


かき出した三角形を見比べながら、どこが同じでどこが違うかを確認すると、子どもたちは、底辺や高さと面積が同じでも、形の違う三角形があることに気付きます。そして、わかりやすく見比べるために、かき出した形を重ね合わせて、次の図を作り始めます。子どもたちの中に生まれた、等積変形を使った考え方です。

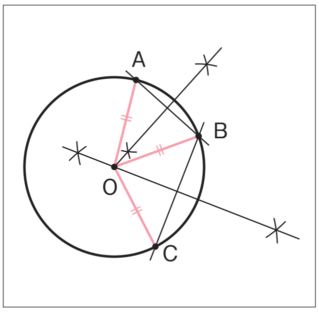


このように、面積公式を見直すことで等積変形の考え方を発見しました。このことは公式の解釈が深まっていく姿となります。

また、台形の面積を求めるときも同じです。台形の面積の公式は「（上底+下底）×高さ÷2=台形の面積」ですが、上底が0cmのとき、「下底×高さ÷2」となり、三角形の面積公式と同じと考えることもできます。



台形の面積公式を学ぶことを通して、三角形の面積公式を見つめ直すことができます。



同じように、中学1年の垂直二等分線の作図の学習では、割れたお皿の破片から元の形を調べる活動もあります。これは、弦の垂直二等分線を用いることで、二等辺三角形の斜辺の長さが等しいこと、点O（オー）を中心とした円の半径は全て等しいことの学習を見つめ直すことにつながります。

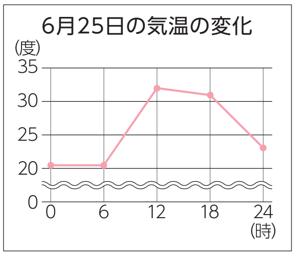
③-1 こんな展開はいかがでしょう（小学4年：「折れ線グラフ」）

折れ線グラフを一通り学習した後の授業を考えます。同日の同じ時間帯の気温変化を表す折れ線グラフなのに、測定時刻の間隔が違うと、グラフの形が大きく

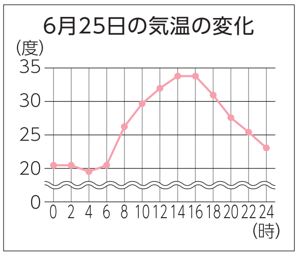
違うことに気付くことで、折れ線グラフの解釈をする例です。点と点を結んだ直線が必ずしも実際の変化を表していないことを見つけると、グラフの見方が深まります。

1. 導入

◆ 日付を隠して、測定時刻の間隔が違う2種類のグラフを見せる。その違いに気付かせた後に、同日のグラフであることを示し、学習への関心を高める。



6月25日の気温の変化



6月25日の気温の変化

T：これは同じ日の気温の変化を表しています。

C：グラフの形が違うよ。違う変わり方をしているみたいだ。本当に同じ日のデータなの？

C：最高気温が違う。左は32度だけど、右は34度。

C：同じ日のデータなのに、最高気温が違うなんて変だ。どういうことだろう。

C：左のグラフで、12時から18時の間は直線だけど、実際はその間で、もっと気温が高いところがあった。

C：だから、右のグラフの方が正確に表している。

C：左のグラフの32度は、最高気温を表していない。

2. 課題提示

◆ 左のグラフが最高気温を正しく示せていないことを知ったことから、右のグラフも本当によいのかという疑問を児童に感じさせ、グラフを再度解釈し直そうとする態度を主体的に促すようにする。

6月25日の最高気温は、右のグラフにあるように16時の34度でよいでしょうか。

3. 自力解決

◆ 最高気温が34度よりも高いことがあるかどうか、2つのグラフから考える（解決時間を2～3分とる）。

4. 発表・話し合い

C：右のグラフの方が正確だから、34度が正しい。

C：右のグラフの形は左のグラフよりも膨らんだりへこんだりしているから、34度より高いことがある。

C：14時と16時の間が気になる。もっと目盛りの細かいグラフがあればわかるはずだ。

◆ 34度ではない理由を中心に述べ、折れ線の直線部分に注目させる。

C：右の方が正確ならば、もっと目盛りを細かくすれば、さらに正しい気温が出るのかな。

C：14時と16時が同じくらいの気温だから、その間に、グラフが山のようになっていると思います。

C：14時より16時の方が0.2度高いから、その後、さらに上がり続けることも考えられます。

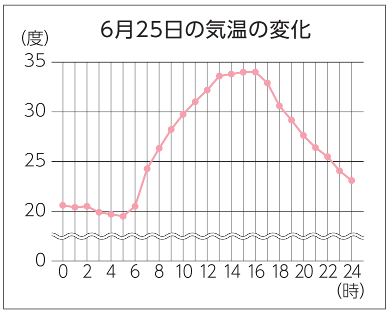
C：1時間ごとのグラフはありますか。

◆ 1時間ごとのグラフを見せ、変化の傾向と実際を結びつけて考えさせる。

C：やっぱり高い！

C：では、34.8度が最高気温になるのかな。

C：もっと目盛りを細かくすると、さらに高くなるかな。



6月25日の気温の変化

C：○時ちょうどに最高気温になるとも限らないんだね。

5. まとめ

◆ グラフを読み取るときには、表現されていないところがある場合もあることに気付かせる。

T：今日の新発見は？

C：今まで、点と点を直線で結んでグラフをかいていたけど、本当はそうならないこともあって、その直線の中に、山や谷があることがわかりました。

C：目盛りを細かくすると、正確になります。

C：最高気温を見つけるときは、細かいほうがいい。目的

に応じて、目盛りを選ぶといいのではないかな。

3 2 こんな展開はいかがでしょう（中学2年：「場合の数」）

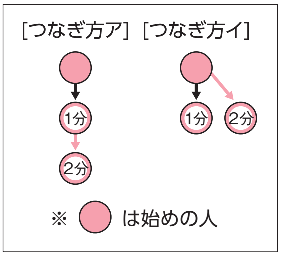
1. 緊急連絡網

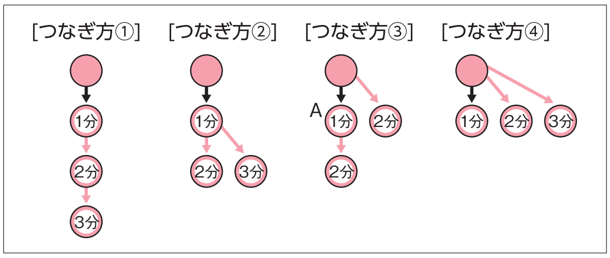
今は少なくなった緊急連絡網。普通、始めの人がいて、そこからいくつかに分かれてつなげていくのが一般的でした。でも、このつなぎ方、最も早いわけではありません。どのようにつないでいくのが最も早い方法なのか、その解決を俯瞰してみる（解釈）と、構造が見えてくる、そんな題材を紹介します。

2.【展開】単純化して考える

クラス40人分のつなぎ方を考えるとします。しかしいきなり40人は難しいので、まず簡単な場合から考えることにします。例えば3人だったら、どのようなつなぎ方があるでしょうか。

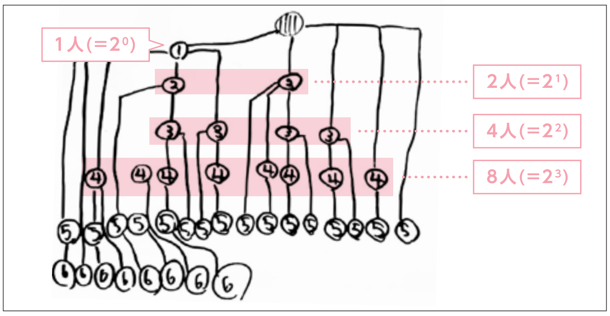
1回の連絡あたり1分かかるとし、同時に2人の人には連絡できないとすると（以下同じ条件）、左の2つのつなぎ方では、かかる時間は2分で変わりません。では、4人の場合はどうでしょうか。





この場合にかかる時間を考えると、つなぎ方①、②、④は3分かかりますが、つなぎ方③のみ、2分でつなぎ終えることができます。始めの人がAさんに連絡した後、始めの人とAさんが、同時に次の人につなぐことができるからです。ここで「一度連絡した人が、暇な時間を作らず、さらに連絡すること」を全体で共有しておきます。

この発想で、「では、10人、さらには40人なら何分で伝えられるか？」を考えていきます。このときには、「同じタイミングで連絡できる人」がわかるよう工夫して表現するよう促します（場合の数を考えるための工夫です）。例えば、次のような図が挙げられます。



同じタイミングで連絡できる人を、丸数字で表しています。6回目の連絡（すなわち6分）で40人に伝わっていることがわかります。

3.【解釈】図をかかなくても…

図をかいていけば、このように何分で伝えられるかわかるわけですが、ここで図のかき方やかけられる人数の増え方に着目すると、図をかかなくてもその時間が見えてきます（関数的な見方）。

例えば10人の場合は4分で伝えることができますが、図をかいてみると最後何人かは連絡しなくてもよくなります。そこで、逆に「4分で伝えられる人数は？」と考えてみると、上図より$1+2^0+2^1+2^2+2^3=16$人であることが見えてきます。その前の3分の時点では8人まで伝わっていますから、伝わる人数は1分毎に2倍に増えていくことがわかります。すると、n分後に情報が伝わる最大の人数は、2^n人であることがわかるので、$2^5<40<2^6$より、「6分で伝わる」と説明できます。

4.【まとめ】解決をふり返ると

図をかいただけでは、目の前の問題は解決できても、その先にある内容の本質は見えてきません。今回は解決をふり返って解釈することで、「何人になってもわかる」というような、一般的な場合を見通すことができました。図の解釈を深めるためには、どのように工夫して図をかくか（並べ方、色遣い等）も重要です。