



1. 式の計算, 式の値

基本問題

- 1 (1) $(2x-y+z)^2$ を展開せよ。
 (2) $4x^2-xy-3y^2$ を因数分解せよ。
 (3) $8x^3+27$ を因数分解せよ。
 (4) $\frac{\sqrt{8}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ を簡単にせよ。

●展開, 因数分解

公式の利用や, 式の置き換え, 積の組合せの工夫を考えないとよい。

公式

●平方根の計算

$\sqrt{k^2a}=k\sqrt{a}$ ($k>0$) や
分母の有理化を利用。

柱

- 2 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2+ax-x+a-2$

(京都産業大)★

(2) $x^2-xy-6y^2+4x-7y+3$

(大阪経済大)★

(3) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

(摂南大)★★

考え方 最も次数の低い文字に着目して整理する。最も次数の低い文字が複数ある場合は、どれか1つの文字で整理する。

- 3 $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ のとき, 次の式の値を求めよ。

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$

(2) $x^3+\frac{1}{x^3}$

(3) $x^4-\frac{1}{x^4}$

(近畿大)★

- 4 $x+y+z=4$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=5$ のとき, $x^2+y^2+z^2$, $x^4+y^4+z^4$ の値をそれぞれ求めよ。

(武庫川女子大)★★

■ A ■

5 次の式を因数分解せよ。

- (1) $2x^4 - 7x^2 - 4$ (鹿児島大) ★
 (2) $(x^2 - x + 2)(x^2 - x - 8) - 56$ (広島修道大) ★
 (3) $(x+1)(x+3)(x+4)(x+6) + 8$ (同志社女子大) ★★
 (4) $x^4 - 18x^2 + 1$ (文教大) ★★

6 (1) 次の2重根号をはずせ。

$$\sqrt{27 - 7\sqrt{5}} \quad (\text{駒澤大}) \text{★★}$$

(2) 次の式を簡単にせよ。

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 + 6x + 9} \quad (\text{改 釧路公立大}) \text{★}$$

7 $a + b = 2\sqrt{2}$, $a^2 + b^2 = 10$ のとき, ab , $a^3 + b^3$, $a^5 + b^5$ の値を求めよ。

(北里大) ★★

8 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ を展開せよ。

また, その結果を用いて, $a^3 - 6ab + 8b^3 + 1$ を因数分解せよ。

(改 関西学院大) ★★★

■ B ■

9 $\sqrt{2}p^2 + \sqrt{3}q = \sqrt{5}$, $\sqrt{2}q^2 + \sqrt{3}p = \sqrt{5}$ ($p \neq q$) のとき, $p+q$, p^2+q^2 ,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \text{ の値を求めよ。} \quad (\text{札幌大}) \text{★★★}$$



2. 方程式と不等式

基本問題

10 次の方程式，不等式を解け。

- (1) $|2x+1|<7$
- (2) $2x^2+5x+2=0$
- (3) $3x^2-3x-1=0$
- (4)
$$\begin{cases} x^2-6x-16<0 \\ -x^2+3x-1<0 \end{cases}$$

●絶対値を含む方程式・不等式

$a>0$ のとき，

$$|x|=a \longrightarrow x=\pm a$$

$$|x|<a \longrightarrow -a<x<a$$

$$|x|>a \longrightarrow x<-a, \quad a<x$$

●2次不等式

2次関数のグラフをかくと考えるやすい。

公式

柱

11 次の方程式，不等式を解け。

- (1) $7x+|x-2|=9$
- (2) $|4x-3|<2x+1$
- (3) $2|x|+|x-1|=x+3$

(金沢工業大)★

(自治医科大)★

(広島工業大)★★

12 不等式 $ax+3>2x$ を解け。ただし， a は定数とする。

(広島工業大)★★

考え方 文字係数の不等式は，文字係数の符号に注意する。

13 $x>y$ のとき，連立方程式
$$\begin{cases} x+y=\sqrt{5} \\ x^2+y^2=3 \end{cases}$$
 を解け。

(甲南大)★★

■ A ■

14 2つの不等式 $|x-6|<3$ ……①, $|x-k|<5$ ……② がある。ただし, 定数 k は実数とする。

- (1) ①, ②をともに満たす実数 x が存在するような k の値の範囲を求めよ。
- (2) ①, ②をともに満たす x が整数のとき, 解の数が3つとなるような k の値の範囲を求めよ。

(改 國學院大)★★

15 a を定数とする。2つの2次方程式 $2x^2 - ax - (2a+2) = 0$,
 $x^2 - (a+2)x + (a+7) = 0$ の共通解が1つだけあるとき, その共通解は $\boxed{ア}$
 であり, $a = \boxed{イ}$ である。

(慶應義塾大)★★

16 $x \geq -6$ の範囲のすべての x に対して不等式 $2ax \leq 6x + 1$ が成り立つための a の条件を求めよ。

(改 上智大)★★★

■ B ■

17 次の問いに答えよ。ただし, $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

- (1) $[2x] = 4$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。
- (2) $[2x-1] = 4x$ を満たす実数 x をすべて求めよ。
- (3) $[2x] - [x] = 4$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(龍谷大)★★★



3. 関数のグラフ

基本問題

- 18 (1) 放物線 $y=x^2-2x+2$ を x 軸方向に 2, y 軸方向に -1 だけ平行移動した放物線の方程式を求めよ。
- (2) 放物線 $y=2x^2-4x+1$ を, x 軸, y 軸, 原点に関して, それぞれ対称移動した放物線の方程式を求めよ。
- (3) 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=3x-k$ が接するとき, k の値を求めよ。

●グラフの平行移動

関数 $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動したグラフを表す関数は,

$$y-q=f(x-p)$$

●グラフの対称移動

関数 $y=f(x)$ のグラフの

x 軸対称 $\rightarrow y=-f(x)$

y 軸対称 $\rightarrow y=f(-x)$

原点対称 $\rightarrow y=-f(-x)$

柱

- 19 放物線 $y=x^2+ax+b$ を原点に関して対称移動し, さらに x 軸方向に 3, y 軸方向に 6 だけ平行移動すると, 放物線 $y=-x^2+4x-7$ が得られるという。このとき, $a=\boxed{\text{ア}}$, $b=\boxed{\text{イ}}$ となる。 (名城大)★

- 20 (1) 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが 3 点 $(1, 0)$, $(-2, 0)$, $(2, 8)$ を通るとき, 定数 a , b , c の値を求めよ。 (広島工業大)★
- (2) 2 点 $(-1, 4)$, $(5, 4)$ を通り, x 軸に接する放物線の方程式を求めよ。 (法政大)★★

- 21 (1) $y=|x-1|-2|x+1|$ ($-4 \leq x \leq 2$) の最大値, 最小値を求めよ。 (愛媛大)★★
- (2) $y=|x^2-3x|+|x-1|-1$ のグラフをかけ。 (改 群馬大)★★

■ A ■

- 22 直線 $x=2$ に関して放物線 $C: y=x^2-2x+3$ と対称な曲線の方程式を求めよ。
 また、点 $(-1, 1)$ に関して放物線 C と対称な曲線の方程式を求めよ。
 (摂南大)★★

- 23 (1) 2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが、2点 $(-1, 0)$, $(3, 8)$ を通り、
 直線 $y=2x+6$ に接するとき、 a , b , c の値を求めよ。 (日本歯科大)★★
 (2) 2つの曲線 $y=x^2$, $y=-(x-4)^2+2$ の両方に接する直線の傾きを求めよ。
 (東京都市大)★★★

- 24 (1) $y=x|x-1|-3x$ のグラフをかけ。
 (2) $x|x-1|=3x+k$ の実数解の個数を求めよ。 ★★

■ B ■

- 25 $f(x)=\frac{1}{2}|x^2+2x-3|+x-\frac{3}{2}$ と定めるとき、次の問いに答えよ。
 (1) 関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。
 (2) 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=k(x+3)-\frac{5}{2}$ の共有点の個数は、定数 k の値によってどのように変わるか調べよ。
 (東京都立大)★★★★



4. 2次関数の最大・最小

基本問題

- 26 (1) 関数 $y=2x^2-12x+c$ ($-1 \leq x \leq 4$) の最大値が7であるとき、定数 c の値と、この関数の最小値を求めよ。
- (2) 2次関数 $y=x^2+2ax-3a+1$ の最小値 m を a で表せ。また、 m の最大値を求めよ。

● 2次関数の最大・最小

まずは平方完成をし、
 $y=a(x-p)^2+q$ の形にして、
 軸を求める。

軸から離れれば離れるほど、
 y の値は大きく、または小さくなることに注意して考える。

柱

- 27 2次関数 $y=ax^2+4ax+b$ が $-1 \leq x \leq 2$ において最大値5、最小値1をとるとき、 a 、 b の値を求めよ。
 (東北学院大)★

- 28 $a \geq 0$ とする。2次関数 $y=x^2-2ax+a^2+a+1$ ($0 \leq x \leq 1$) について、次の問いに答えよ。

- (1) 最大値 M を a を用いて表せ。
- (2) 最小値 m を a を用いて表せ。

(改 広島工業大)★★

考え方 軸や定義域に文字が含まれる関数の最大・最小は、軸と定義域の位置関係に着目して、場合分けするのが基本。

- 29 x を実数とする。 $A=x^2-2x$ とおくと、 A の最小値は **ア** である。よって、 $y=(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)$ の最小値は **イ** である。
 (北海道工業大)★★

- 30 $x \geq 1$, $y \geq -1$, $2x+y=5$ であるとき、 xy の最大値は **ア**、最小値は **イ** で、 x^2+y^2 の最大値は **ウ**、最小値は **エ** である。
 (摂南大)★★

考え方 条件式を用いて変数を減らす。

■ A ■

31 a を実数とする。 x の 2 次関数 $f(x) = x^2 + ax + 1$ の区間 $a - 1 \leq x \leq a + 1$ における最小値を $m(a)$ とする。

- (1) $m(a)$ を a の値で場合分けして求めよ。
- (2) a が実数全体を動くとき、 $m(a)$ の最小値を求めよ。 (改 岡山大) ★★★

32 (1) $x^2 + 2y^2 = 1$ のとき $x + 4y^2$ の最大値と最小値を求めよ。 (福島大) ★★

- (2) x, y を実数とする。 $x^2 - 4xy + 5y^2 - 6x + 6y + 12$ は、 $x = \boxed{\text{ア}}$, $y = \boxed{\text{イ}}$ のとき、最小値 $\boxed{\text{ウ}}$ をとる。 (成蹊大) ★★

33 (1) a を実数とする。関数 $y = -x^2 + 4x$ ($x \geq a$) の最大値が 3 となるときの a の値を求めよ。 (改 福岡大) ★★

- (2) a を実数とする。関数 $f(x) = x|x - 1|$ の $a \leq x \leq a + 1$ における最大値を求めよ。 (改 信州大) ★★★

■ B ■

34 $k \geq 0$ とする。関数 $f(x) = x^2 - 2kx + \frac{1}{2}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 定義域が $0 \leq x \leq 1$ である 2 次関数 $y = f(x)$ の最小値を m とするとき、 m を k を用いて表せ。
- (2) $0 \leq x \leq 1$ であるすべての x について $0 \leq f(x) \leq 1$ が成り立つような k の値の範囲を求めよ。 (宇都宮大) ★★★★★



5. 2次不等式の応用, 2次関数の総合問題

基本問題

35 2次関数 $y=x^2+(m+2)x+m+4$ について, 次の問いに答えよ。ただし, m は定数とする。

- (1) この2次関数のグラフが x 軸と共有点をもつとき, m の値の範囲を求めよ。
- (2) この2次関数のグラフが x 軸と接するとき, 接点の x 座標を求めよ。

● 2次不等式とグラフ

$y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) のグラフと x 軸の共有点の個数は, $ax^2+bx+c=0$ の判別式 D の符号で判断する。

柱

36 (1) 2次不等式 $ax^2+bx+3>0$ の解が, $-1<x<3$ であるとき, a, b の値を求めよ。 (高岡法科大) ★

(2) 放物線 $y=mx^2+(1-2m)x+4m$ の y の値が常に負になるような定数 m の値の範囲を求めよ。 ★

37 実数を係数とする2次方程式 $x^2-2(k+1)x+2(k^2+3k-10)=0$ が, 次の条件を満たすとき, 定数 k の値の範囲を求めよ。

- (1) 正の解と負の解をもつ。
- (2) 異なる2つの正の解をもつ。
- (3) すべての解が -2 より小さい。 ★★

考え方 2次方程式 $f(x)=0$ の解の存在範囲の問題は, 放物線 $y=f(x)$ と x 軸の共有点の問題に帰着するとよい。放物線 $y=f(x)$ の頂点 (または $f(x)=0$ の判別式), 軸, ある点での値 $f(p)$ の符号に着目して考える。

38 a と x を実数とする。 x についての不等式 $x^2-(a^2+a-2)x+a^3-2a<0$ を解け。 (法政大) ★★

■ A ■

- 39 $f(x) = x^2 - 3ax + \frac{9}{2}a + 18$ について、すべての実数 x に対して、 $f(x) > 0$ となる定数 a の値の範囲は $\boxed{\text{ア}} < a < \boxed{\text{イ}}$ である。また、 $-2 \leq x \leq 2$ で常に $f(x) \geq 0$ となる a の値の範囲は $\boxed{\text{ウ}} \leq a \leq \boxed{\text{エ}}$ である。 (摂南大)★★

- 40 放物線 $y = x^2 + ax + 2$ が、2点 A(0, 1), B(2, 3) を結ぶ線分と2個の共有点をもつときの a の値の範囲を求めよ。 (改 群馬大)★★★

- 41 a を実数の定数とする。2次不等式 $ax^2 + 6x + 9 > 0$ を満たす整数 x がただ1つであるような a の値の範囲を求めよ。 (改 関東学院大)★★★

■ B ■

- 42 次の条件を満たす実数 x の値の範囲をそれぞれ求めよ。

- (1) $x^2 + xy + y^2 = 1$ を満たす実数 y が存在する。
- (2) $x^2 + xy + y^2 = 1$ を満たす正の実数 y が存在しない。
- (3) すべての実数 y に対して $x^2 + xy + y^2 > x + y$ が成り立つ。

(慶應義塾大)★★★★