ここでは，大学入学共通テストの特徴と取り組み方，そして取り組む上で身につけたい力について見ていきましょう。

大学入学共通テストの特徴として，大問が一連の流れになっていることが挙げられます。
具体的には，次の3ステップで構成された問題が多いです。

(Ⅰ)　まずは，具体的な問題を解く。
(Ⅱ)　(Ⅰ)で考えた問題を一般化・抽象化した問題を解く。
(Ⅲ)　(Ⅰ)，(Ⅱ)で考えた内容を利用して，応用的な問題を解く。

すなわち，大問の前半に設置されている問題を誘導として，後半の応用的な問題を解くことができるかどうかが1つの焦点になります。
また，大学入試センターからは，『問題の作成に当たっては，日常の事象や，数学のよさを実感できる題材，教科書等では扱われない数学の定理等を既知の知識等を活用しながら導くことのできるような題材等を含めて検討する』と公表されています。

それでは，実際の大学入学共通テストでは，どのように取り組むとよいでしょうか。実際に問題を見てみましょう。

【問題1】

〔1〕　実数 a，b，c が

$$a+b+c=1 \quad \cdots\cdots①$$

および

$$a^2+b^2+c^2=13 \quad \cdots\cdots②$$

を満たしているとする。

(1)　$(a+b+c)^2$ を展開した式において，①と②を用いると

$$ab+bc+ca=\boxed{\text{アイ}}$$

であることがわかる。よって

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=\boxed{\text{ウエ}}$$

である。

(2)　$a-b=2\sqrt{5}$ の場合に，$(a-b)(b-c)(c-a)$ の値を求めてみよう。

$b-c=x$，$c-a=y$ とおくと

$$x+y=\boxed{\text{オカ}}\sqrt{5}$$

である。また，(1)の計算から

$$x^2+y^2=\boxed{\text{キク}}$$

が成り立つ。

これらより

$$(a-b)(b-c)(c-a)=\boxed{\text{ケ}}\sqrt{5}$$

である。

（22　大学入学共通テスト本試）

数学Ⅰ　数と式・2次関数

1

次の問いに答えよ。

(1)　$-1<a<4$ のとき，次の式を絶対値の記号を用いずに表せ。

(ア)　$|a-5|$　　　(イ)　$|2a-4|$

(2)　$\sqrt{a^2+2a+1}+\sqrt{a^2-4a+4}$ を簡単にせよ。また，最小値を求めよ。

(3)　方程式 $|x+1|=2x$ を解け。

(4)　$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=3$ のとき，次の式の値を求めよ。

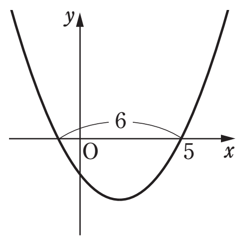
(ア)　$\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}$　　　(イ)　$\alpha-\dfrac{1}{\alpha}$

2

次の問いに答えよ。

(1)　最小値 -3 をとる2次関数が右の図の放物線をグラフとするとき，この2次関数を求めよ。

(2)　放物線 $y=x^2-6x+10$ が傾き3の直線から切り取る線分の長さが $\sqrt{10}$ であるとき，この直線と y 軸との交点の座標を求めよ。



3

太郎さんと花子さんが次の問題について話し合っている。

> 問題　放物線 $y=-x^2+x$　……①　を y 軸方向に平行移動させた放物線 P が x 軸から切り取る線分の長さが3となるとき，放物線 P と y 軸との交点の座標を求めよ。

> 太郎：放物線 P と y 軸との交点の座標を $(0,\ c)$ とすると，放物線 P の方程式は $\boxed{\text{ア}}$ とおけるね。
> 花子：y 軸方向にだけ平行移動させただけなら，もとの放物線の軸と放物線 P の軸は同じだから，放物線 P と x 軸との共有点の座標は，$\boxed{\text{イ}}$ と $\boxed{\text{ウ}}$ になるね。

(1)　$\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまる式や座標を，それぞれ答えよ。

(2)　太郎さんの考え方を利用して，放物線 P と y 軸との交点の座標を求めよ。

(3)　花子さんの考え方を利用して，放物線 P と y 軸との交点の座標を求めよ。

78 10分

空集合を$\emptyset$と表す。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 「集合Aと集合Bの共通部分は空集合である」という条件を，記号を用いて表せ。

(2) 「1のみを要素にもつ集合は集合Cの部分集合である」という条件を，記号を用いて表せ。

(3) 集合Dの要素が1，2のみであるとき，集合Dの部分集合をすべて表せ。

(4) 無理数全体の集合をEとするとき，命題「$x\in E$，$y\in E$ならば，$x+y\in E$」が偽であることを示すための反例となるx，yの組を，次の⓪～⑤のうちから2つ選べ。必要ならば，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$が無理数であることを用いてもよい。

⓪ $x=\sqrt{2}$，$y=0$　　① $x=3-\sqrt{3}$，$y=\sqrt{3}-1$
② $x=\sqrt{3}+1$，$y=\sqrt{2}-1$　　③ $x=\sqrt{4}$，$y=-\sqrt{4}$
④ $x=\sqrt{8}$，$y=1-2\sqrt{2}$　　⑤ $x=\sqrt{2}-2$，$y=\sqrt{2}+2$

79 15分

常用対数表を用いずに，常用対数のおよその値を求める方法について，太郎さんと花子さんが次の会話をしている。2人の会話を読んで，以下の問いに答えよ。

太郎：$\log_{10}2$の値を小数第2位まで求める課題が出されたね。小数第3位は切り捨てていいらしいけど，常用対数表は使っちゃいけないんだよね。
花子：先生が，「$8\cdot10^3<2^{13}$」を利用していいって言っていたね。どうやって利用するのかな。
太郎：右辺が2^{13}だから，両辺の常用対数をとったらどうかな。

$$\log_{10}(8\cdot10^3)<\log_{10}2^{13}$$
$$\boxed{\text{ア}}+3\log_{10}2<13\log_{10}2$$
$$\log_{10}2>\boxed{\text{イ}}$$

となるね。
花子：$2^{13}=\boxed{\text{ウ}}$だから，$2^{13}<10^{\boxed{\text{エ}}}$となるね。これも両辺の常用対数をとると，

$$\log_{10}2^{13}<\log_{10}10^{\boxed{\text{エ}}}$$
$$\log_{10}2<\boxed{\text{オ}}$$

となるね。
太郎：ということは，小数第2位までだと，$\log_{10}2=\boxed{\text{カ}}$になるね。

(1) $\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{カ}}$に当てはまる数を求めよ。ただし，$\boxed{\text{イ}}$は小数で，$\boxed{\text{エ}}$はなるべく小さい自然数で，$\boxed{\text{オ}}$は小数第4位を四捨五入した数で答えよ。

(2) $7^2<50$と$\log_{10}2=\boxed{\text{カ}}$を利用して，$\log_{10}7<0.85$が成り立つことを示せ。

(3) $80<3^4$，$3^5<245$と$\log_{10}2=\boxed{\text{カ}}$，(2)の結果を利用して，小数第3位を四捨五入して$\log_{10}3$の値を小数第2位まで求めよ。

80　15分

> 問題　直線 $2x-y-2=0$ の傾きを利用して，この直線が円 $x^2+y^2-2x-2y=0$ によって切り取られる弦の長さを求めよ。

上の問題について，太郎さんと花子さんが次のような会話をしている。2人の会話を読んで，以下の問いに答えよ。

> 太郎：直線が円で切り取られる弦の長さを求めるときは，たしか，(a)点と直線の距離と三平方の定理を利用したか，(b)解と係数の関係を用いたよね。直線の傾きを利用するってどういうことかな。
> 花子：まず，(c)図をかいてみよう。何かわかるかな。直線の傾きは $\boxed{\text{ア}}$ だから……
> 太郎：こうすれば，(d)直角三角形を考えることができそうだよ。
> 花子：そうすると，辺の比を使って……

(1)　下線部(a)，(b)の方法をそれぞれ用いて，弦の長さを求めよ。(直線の傾きは用いなくてよい)

(2)　(i)　下線部(c)について，与えられた直線と円を図示せよ。

　(ii)　$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまる数を求めよ。

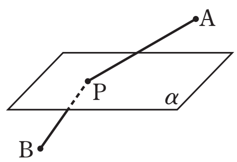
　(iii)　下線部(d)の三角形を(i)の図にかけ。

(3)　(2)を参考にして，弦の長さを求めよ。

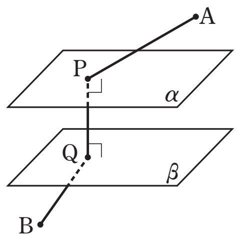
81　10分

次の問いに答えよ。

(1)　平面 α を挟んで，定点Aと定点Bがある。平面 α 上に点Pがあり，AP+BPの長さの和を最小にしたい。点Pをどこに定めればよいか。



(2)　2つの平行な平面 α，β を挟んで，定点Aと定点Bがある。平面 α 上と β 上に点Pと点Qを $PQ\perp\alpha$，$PQ\perp\beta$ となるように定め，AP+PQ+QBの長さの和を最小にしたい。点Pをどこに定めればよいか。



数学Ⅰ　数と式・2次関数

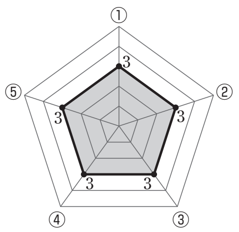
1　文字式と絶対値

FGIA　例題20(p.53)，例題26(p.64)，例題28(p.67)

数学的思考の解説

思考力　判断力　表現力

整理　多様　実験　抽象　要素　置換　統合　活用



(1)　a の範囲が与えられているから，整理 実験 絶対値記号の中の数式について，符号が正から負に変わるポイント，すなわち，0になる場合に着目して，絶対値をはずすことを考える。

(2)　絶対値や根号で表された式のように，多様 数式にはいくつかの意味をもつものが存在したり，多様 異なる数式として表現されているものが，実は同じ意味をもつものとして存在したりすることもある。

抽象 根号（$\sqrt{\ }$）の中身が負にならないことは，その数が実数であるための条件や与えられた問題の条件として存在していることも大切な観点である。

(3)　得られた数式から，得られた値が条件を満たすかを考える。

(4)　活用 与えられた式の値が利用できるように，式の形を変形することを考える。

解答

(1)　(ア)　$|a-5|=\begin{cases} a-5 & (a\geqq 5) \\ -a+5 & (a<5) \end{cases}$

より，$-1<a<4$ のとき，

$|a-5|=\boldsymbol{-a+5}$

(イ)　$|2a-4|=\begin{cases} 2a-4 & (a\geqq 2) \\ -2a+4 & (a<2) \end{cases}$

より，$-1<a<4$ のとき，

$|2a-4|=\begin{cases} \boldsymbol{2a-4} & \boldsymbol{(2\leqq a<4)} \\ \boldsymbol{-2a+4} & \boldsymbol{(-1<a<2)} \end{cases}$

(2)　$\sqrt{a^2+2a+1}+\sqrt{a^2-4a+4}=\sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{(a-2)^2}=|a+1|+|a-2|$

◀ $\sqrt{A^2}=|A|$ より，
$\sqrt{(a+1)^2}=|a+1|$
$\sqrt{(a-2)^2}=|a-2|$

ここで，

$|a+1|=\begin{cases} a+1 & (a\geqq -1) \\ -a-1 & (a<-1) \end{cases}$

$|a-2|=\begin{cases} a-2 & (a\geqq 2) \\ -a+2 & (a<2) \end{cases}$

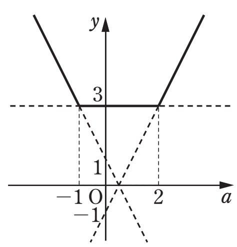
したがって，

$a\geqq 2$ のとき，　(与式)$=a+1+a-2=\boldsymbol{2a-1}$

$-1\leqq a<2$ のとき，　(与式)$=a+1-a+2=\boldsymbol{3}$

$a<-1$ のとき，　(与式)$=-a-1-a+2=\boldsymbol{-2a+1}$

また，$y=|a+1|+|a-2|$ のグラフは右の図のようになる。



よって，　**最小値3**

(3)　$|x+1|=2x$

(i)　$x+1\geqq 0$，すなわち，$x\geqq -1$ のとき

$x+1=2x$ より，　$x=1$

これは $x\geqq -1$ を満たす。

(ii)　$x+1<0$，すなわち，$x<-1$ のとき

$-(x+1)=2x$ より，　$x=-\dfrac{1}{3}$