

まとめ 1 多項式の計算・因数分解

1 単項式と多項式

定数……数や数と同じように考えている文字
 単項式……数やいくつかの文字を掛け合わせた式
 単項式の次数……着目した文字が掛け合わされている個数
 係数……着目した文字以外の数や文字の部分
 多項式……単項式の和として表された式
 多項式を整式ともいう。
 項……多項式を構成する1つ1つの単項式
 単項式は項が1つの多項式と考える。
 多項式の次数……各項の次数のうちで最大のもの
 定数項……定数だけからなる項(定数項の次数は0次)

注 多項式においては、「 x についての多項式」などのように、着目する文字を明らかにしてから、その次数、係数などを調べるのが普通である。

2 多項式の整理

同類項……多項式で、着目した文字の部分が同じである項
 多項式の整理の方法
 (1) 同類項をまとめる。
 (2) 1つの文字について、次数の高い(大きい)方から順に並べる。〈降べきの順〉

3 多項式の加減

同類項をまとめて計算する。

注 とくに、減法(引き算)のときは、かっこ括弧を忘れない ように!!

例) $A=2x+y$, $B=x-3y$ のとき

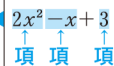
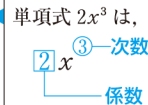
$$A-B=(2x+y)-(x-3y)=2x+y-x+3y=x+4y$$

4 指数法則

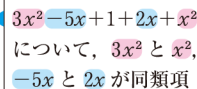
m, n が正の整数のとき、次の指数法則が成り立つ。

- (1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (2) $(a^m)^n = a^{mn}$
 (3) $(ab)^n = a^n b^n$

注 2×5 を $2 \cdot 5$ と表す。



数0の次数は考えない。



次数の低い(小さい)方から順に並べることもある。〈昇べきの順〉

加減とは、
 加法(足し算)と、
 減法(引き算)
 のことである。

(3)について、
 $2^3 \times 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3$
 でよいが、
 $2 \times 5^3 \neq (2 \cdot 5)^3$

5 多項式の計算法則

交換法則 $A+B=B+A$, $AB=BA$

結合法則 $(A+B)+C=A+(B+C)$,
 $(AB)C=A(BC)$

分配法則 $A(B+C)=AB+AC$,
 $(A+B)C=AC+BC$

分配法則を用いて多項式を変形し、単項式の和だけの形にすることを多項式の展開という。

6 単項式の乗法

交換・結合法則と指数法則を用いて計算する。
 係数の部分どうし、文字の部分どうしを計算し、整理する。

7 多項式の乗法

分配法則と単項式の乗法を用いて計算する。

次数や同類項に注意する。

8 乗法公式(展開公式)

多項式の乗法では、次の乗法公式がよく用いられる。

- (1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (2乗の公式)
 (2) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (和と差の積の公式)
 (3) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
 (4) $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$
 (5) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
 (6) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
 $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (3乗の公式)
 (7) $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$
 $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

注 (5)の式では、 ca という項があり、アルファベット順の ac となっていない。これは、右の図のように、 a, b, c が輪の形に循環するように整理しているからである。これを、**輪環の順(cyclic order)** に整理するという。



公式の a, b, c, d, x には何を代入してもよい。

(和)×(差)

(1), (6), (7)について、それぞれ、2つ目の公式は1つ目の公式の b に $-b$ を代入したものである。

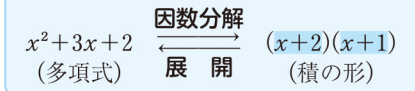
式の整理のしかたは
 ・アルファベット順
 ・輪環の順
 ・1つの文字について降べきの順
 などがあり、式が見やすくなるように使い分けるとよい。

9 因数分解

因数分解……多項式をいくつかの**多項式の積の形**にすること

多項式 P が多項式 A, B, \dots の積として表されるとき, A, B, \dots を多項式 P の**因数**という。

注 素因数分解……1より大きい整数を**素数の積の形**にすること



注 次のような式変形は因数分解したとはいわない。
 $x^2+3x+2=x(x+3)+2$
 $x(x+3)$ に +2 がついて、**積だけの形**になっていない。

因数分解のポイント

- (1) 共通因数があればくり出す。
- (2) 公式を利用する。
- (3) たすき掛けを利用する。
- (4) () でくくれる場合は () でくくる。
(または文字におき換える。)
- (5) いくつかの文字を含む多項式の場合は、
文字の次数に着目する。
・最も次数の低い文字について整理する。
・文字の次数が同じときは、1つの文字
について降べきの順に整理する。
- (6) x^4+px^2+q のような複2次式は、
 $(x^2+\Delta)^2-(\Diamond x)^2$ と変形する。

$P=A \times B \times C$ のとき,
 A, B, C を P の因数
 という。

$60=2^2 \times 3 \times 5$
 など

x^2+3x+2 は,
 $x+2, x+1$
 を因数にもつ。

p.33 **注** 参照

p.36 例題 11 参照

p.41 例題 16 参照

10 因数分解の公式

- (1) $ma+mb=m(a+b)$
- (2) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
 $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
- (3) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
- (4) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$
- (5) $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$
 $(ac \neq 1)$
- (6) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

共通因数でくくる。
 和, 差の2乗の逆

平方の差は, 和と差の積

たすき掛け

Check!

- *
1 $4x^2-2x+1$ は x について何次の多項式か。
- *
2 x^3-2xy^4 は, $[x], [y]$ について何次式か。
- *
3 $2x^2+4xy+y^2-3x+5y-6$ を x について降べきの順に整理せよ。
- *
4 $A=3x^2-x+2, B=2x^2-3x-4$ のとき, $A-B$ を求めよ。
- *
5 次の計算をせよ。
 (1) $a^3 \times a^2$ (2) $(a^3)^2$ (3) $(a^2b)^3$
- *
6 次の式を展開せよ。
 (1) $3x(x^2+y)$ (2) $(x+2)(y+3)$
 (3) $(x+3)^2$ (4) $(x-1)^2$
 (5) $(x+3)(x-3)$ (6) $(x+3)(x+4)$
 (7) $(2x+3)(4x+5)$ (8) $(2a+b-3c)^2$
- *
7 次の式を因数分解せよ。
 (1) $2x^2y+6xy^2$ (2) $(a+b)x+2(a+b)$
- *
8 次の式を因数分解せよ。
 (1) $9x^2+6x+1$ (2) $4x^2-9y^2$
 (3) $x^2+7x+12$ (4) $2x^2+13x+15$

▶▶ 解答編 p.2

- 1** 2次 **2** x について, 3次式 y について, 4次式
3 $2x^2+(4y-3)x+y^2+5y-6$ **4** x^2+2x+6
5 (1) a^5 (2) a^6 (3) a^6b^3
6 (1) $3x^3+3xy$ (2) $xy+3x+2y+6$ (3) x^2+6x+9 (4) x^2-2x+1
 (5) x^2-9 (6) $x^2+7x+12$ (7) $8x^2+22x+15$ (8) $4a^2+b^2+9c^2+4ab-6bc-12ca$
7 (1) $2xy(x+3y)$ (2) $(a+b)(x+2)$
8 (1) $(3x+1)^2$ (2) $(2x+3y)(2x-3y)$ (3) $(x+3)(x+4)$ (4) $(x+5)(2x+3)$

例題 1 多項式の整理 ***

(1) 次の多項式は、[]内の文字について何次式か、また、各項の係数、および定数項を答えよ。

$$3x^3 - 2x^2y^4 + 4y^5 \quad [x], [y], [x \text{ と } y]$$

(2) 次の多項式を x について降べきの順に整理し、各項の係数、および定数項を答えよ。

$$2x - 4x^2 + 3 - 6x + 4 + x^3 + x^2$$

考え方 (1) 各項の次数は

	$3x^3$	$-2x^2y^4$	$4y^5$	
	↓	↓	↓	
x について	3次	2次	0次(定数項)	……3次が最大
y について	0次(定数項)	4次	5次	……5次が最大
x と y について	3次	6次	5次	……6次が最大

x に着目しているときは、 x 以外の文字は定数として考える。

(2) 通常、降べきの順に整理する。

x についての降べきの順に整理するには、

- ① 同類項をまとめる。
- ② x について次数の高い方から低い方へ順に並べる。

解答 (1) x について、3次式で、
 x^3 の係数は3、 x^2 の係数は $-2y^4$ 、定数項は $4y^5$
 y について、5次式で、
 y^5 の係数は4、 y^4 の係数は $-2x^2$ 、定数項は $3x^3$
 x と y について、6次式で、
 x^3 の係数は3、 x^2y^4 の係数は -2 、 y^5 の係数は4

(2) $2x - 4x^2 + 3 - 6x + 4 + x^3 + x^2$
 $= x^3 + (-4+1)x^2 + (2-6)x + (3+4)$
 $= x^3 - 3x^2 - 4x + 7$
 x^3 の係数は1、 x^2 の係数は -3 、 x の係数は -4 、
 定数項は7

多項式の次数は、含まれる単項式の次数の中で、最大のものをいう。
 x についてみると、 $3x^3$ の次数が最大、 $4y^5$ は x がないので定数項
 x と y についてみると、定数項はない。

Focus

x について降べきの順に整理

x の1次式 $\bigcirc x + \square$ の形にする
 x の2次式 $\bigcirc x^2 + \square x + \triangle$ の形にする

練習 1 (1) 次の多項式は、[]内の文字について何次式か、また、各項の係数、および定数項を答えよ。

$$2x^2 + 3xy^2 - 7y^3 \quad [x], [y], [x \text{ と } y]$$

(2) 次の多項式を x について降べきの順に整理し、各項の係数、および定数項を答えよ。

$$2x^2 - 1 + x - 3x^2 - x + 2 - x^4$$

例題 2 多項式の加法・減法 ***

(1) $\frac{3x^2 - x - 2}{2} - \frac{x^2 + 2x - 2}{3}$ を計算せよ。

(2) $A = 2 + x^2 + 4x^3 + 3x$, $B = 5x - 7 + x^2 - 2x^3$ のとき、次の式を計算せよ。

(ア) $A - B$

(イ) $-2(A + B) - 3\{B - 2(A + B)\}$

考え方 (1) 分母が異なるので、まず通分する。
 (2) 直接 A , B の式を代入しないで、まず与えられた式を簡単にしてから代入する。

解答 (1) $\frac{3x^2 - x - 2}{2} - \frac{x^2 + 2x - 2}{3}$
 $= \frac{1}{6}\{3(3x^2 - x - 2) - 2(x^2 + 2x - 2)\}$
 $= \frac{1}{6}(9x^2 - 3x - 6 - 2x^2 - 4x + 4)$
 $= \frac{7x^2 - 7x - 2}{6}$

(2) $A = 4x^3 + x^2 + 3x + 2$, $B = -2x^3 + x^2 + 5x - 7$
 (ア) $A - B$
 $= (4x^3 + x^2 + 3x + 2) - (-2x^3 + x^2 + 5x - 7)$
 $= 4x^3 + x^2 + 3x + 2 + 2x^3 - x^2 - 5x + 7$
 $= 6x^3 - 2x + 9$

(イ) $-2(A + B) - 3\{B - 2(A + B)\}$
 $= -2A - 2B - 3B + 6(A + B)$
 $= -2A - 2B - 3B + 6A + 6B$
 $= 4A + B$
 $= 4(4x^3 + x^2 + 3x + 2) + (-2x^3 + x^2 + 5x - 7)$
 $= 16x^3 + 4x^2 + 12x + 8 - 2x^3 + x^2 + 5x - 7$
 $= 14x^3 + 5x^2 + 17x + 1$

分母が異なるので、2と3の最小公倍数6で通分する。
 括弧()を忘れずに。
 括弧をはずして、同類項をまとめる。括弧をはずすとき、符号の変化に注意。
 降べきの順に整理して、式を見やすくする。
 括弧を忘れない。
 $\{4 - (-2)\}x^3$ のように、係数を拾って計算して、この行を省略してもよい。
 代入する前に、与えられた式を整理する。
 最後に代入する。括弧を忘れない。

Focus

代入する前に与えられた式を整理せよ

練習 2 (1) 次の多項式は、[]内の文字について何次式か、また、各項の係数、および定数項を答えよ。

$$2x^2 + 3xy^2 - 7y^3 \quad [x], [y], [x \text{ と } y]$$

(2) 次の多項式を x について降べきの順に整理し、各項の係数、および定数項を答えよ。

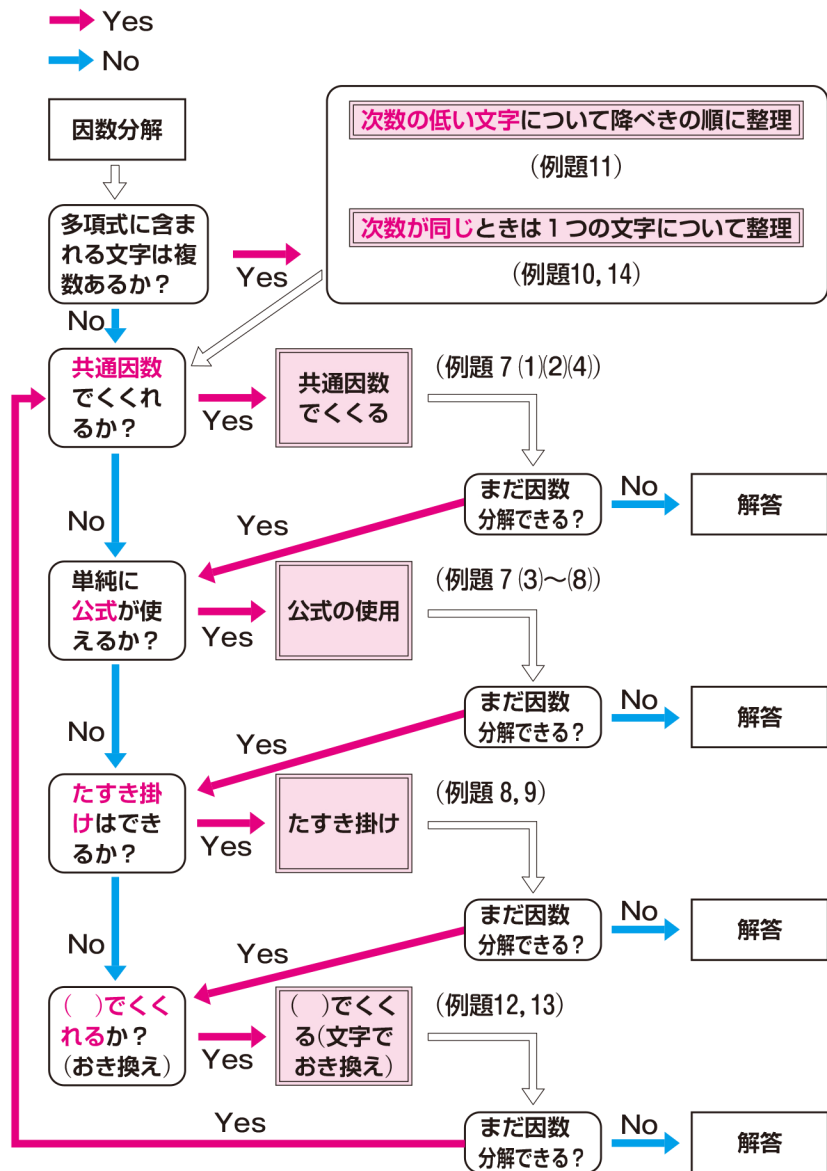
$$2x^2 - 1 + x - 3x^2 - x + 2 - x^4$$

練習 2 (1) $\frac{x^2 + 2x - 3}{3} - \frac{2x^2 - x - 4}{5}$ を計算せよ。

(2) $A = -2x^2 - xy + 4y^2$, $B = -xy - 2y^2 + 3x^2$ のとき、
 $-5A - 2\{B - 2(A - B)\}$ を計算せよ。

Column

「見てわかる因数分解」



Step Up

* 1 ある多項式に $3x^2+2x-4$ を加えるところを誤って引いたので、答えが $-2x^2+9x+6$ になった。正しい答えを求めよ。
p.27

** 2 $(x^3-3x^2+x+7)(x^3+2x^2+2x+1)$ を展開すると、 x^4 の係数は 7 , x^3 の係数は 1 となる。
p.28

** 3 次の式を展開せよ。
p.30 p.37
(1) $(1+x-x^2-x^3)(1-x-x^2+x^3)$ (名古屋経済大)
(2) $(a+b+c)^2-(b+c-a)^2+(c+a-b)^2-(a+b-c)^2$ (奈良大)

** 4 次の式を因数分解せよ。
p.32 p.35 p.38
(1) $2a^2b^2-5ab-3$ (2) $(x+y)^3-1$
(3) $x^2+x-(y+1)(y+2)$ (4) $a^2x^2+a^2x-ax+x^2+x-a$
(5) $x^2y+2xy^2-x^2+4y^2-xy-x-6y+2$
(6) a^6-7a^3-8

** 5 次の式を因数分解せよ。
p.36 p.39
(1) $(x+y)^4-(x-y)^4$ (2) x^6-y^6
(3) a^2b+a^2-b-1 (4) $(a+b+c+1)(a+1)+bc$
(5) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-6)-3x^2$
(6) $a^2b^2(a-b)+b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)$

*** 6 次の式を因数分解せよ。
p.40 p.41
(1) $x^4-2x^2y^2-8y^4$ (2) x^4+4
(3) $(x-z)^3+(y-z)^3-(x+y-2z)^3$