

1 自然数の範囲での約数と倍数

ものの個数や順序を表すのに用いる数 1, 2, 3, 4, 5, …… が自然数である。まずは、自然数について考えてみよう。

約数と倍数

自然数 a , b と、ある自然数 k について、

$$a = bk$$

が成り立つとき、 b は a の **約数**, a は b の **倍数** であるという。

たとえば、 $18 = 3 \times 6$ であるから、3 や 6 は 18 の約数であり、18 は 3 や 6 の倍数である。

また、どの自然数も 1 で割り切れるから、1 はすべての自然数の約数である。

問 1 24 の約数をすべて求めよ。

☐ ☐ CHECK

倍数の見分け方

ある自然数で、一の位が 0, 2, 4, 6, 8 ならば、その数は 2 の倍数である。また、一の位が 0, 5 ならば、その数は 5 の倍数である。

次に、3 桁の自然数が 3 の倍数となる条件を調べてみよう。

3 桁の自然数 n の百の位、十の位、一の位の数それぞれ a , b , c とすると、 $n = 100a + 10b + c$ と表され、次のように変形できる。

$$n = 99a + 9b + a + b + c \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$= 3(33a + 3b) + a + b + c$$

ここで、 $3(33a + 3b)$ は 3 の倍数であるから、 $a + b + c$ が 3 の倍数 (3 で割り切れる) ならば、 n は 3 の倍数である。

また、 $\textcircled{1}$ で $99a + 9b = 9(11a + b)$ は 9 の倍数でもあるから、 $a + b + c$ が 9 の倍数 (9 で割り切れる) ならば、 n は 9 の倍数である。

$n = 468$ のとき、
 $468 = 400 + 60 + 8$
 $= 4 \times 100$
 $+ 6 \times 10 + 8 \times 1$
 と表せる。

逆に、 n が 3 の倍数ならば、各位の数の和は 3 の倍数であり、 n が 9 の倍数ならば、各位の数の和は 9 の倍数である。

自然数の倍数の見分け方は次の通りである。

いろいろな倍数の見分け方

- 2 の倍数 一の位が 0, 2, 4, 6, 8
- 3 の倍数 各位の数の和が 3 の倍数
- 4 の倍数 下 2 桁が 4 の倍数または 00
- 5 の倍数 一の位が 0, 5
- 6 の倍数 2 の倍数かつ 3 の倍数
- 8 の倍数 下 3 桁が 8 の倍数または 000
- 9 の倍数 各位の数の和が 9 の倍数

6 の倍数は、
一の位が偶数かつ
各位の数の和が
3 の倍数である。

例 1 4584 がどんな数の倍数であるかを見分ける

一の位が 4 なので、4584 は 2 の倍数である。

各位の数の和 $4+5+8+4=21$ が 3 の倍数なので、
4584 は 3 の倍数である。

2 の倍数であり、3 の倍数でもあるから、4584 は 6 の倍数である。

下 2 桁の数 84 が 4 の倍数なので、4584 は 4 の倍数である。

下 3 桁の数が、 $584=8 \times 73$ より、8 の倍数なので、
4584 は 8 の倍数である。

問 2 次の自然数は 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 のどの倍数であるか調べよ。

(1) 252

(2) 735

(3) 3897

☐ ☐ CHECK

素因数分解

2 以上の自然数について、1 とその数以外に約数をもたないとき、その自然数を **素数** という。

素数を小さい方から書き並べると、次のようになる。

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, ……

素数でない自然数を **合成数** という。ただし、1 は素数、合成数のいずれでもないものとする。

合成数
4, 6, 8, 9,
10, 12, ……

自然数がいくつかの自然数の積の形で表されるとき、その積の1つ1つの数を、もとの数の **因数** という。

たとえば、60 は 6×10 と表されるので、6, 10 は 60 の因数である。また、60 は $3 \times 4 \times 5$ と表されるので、3, 4, 5 も 60 の因数である。

因数のうち素数であるものを **素因数** といい、自然数を素数だけの積で表すことを **素因数分解** するという。

例2 60, 72 を素因数分解する

右のように、素数で次々に割って、

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$$

$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{)60} \\ 2 \overline{)30} \\ 3 \overline{)15} \\ 5 \\ 2 \overline{)72} \\ 2 \overline{)36} \\ 2 \overline{)18} \\ 3 \overline{)9} \\ 3 \end{array}$$

問3 次の自然数を素因数分解せよ。

(1) 18

(2) 120

(3) 588

☐ ☐ CHECK

例2 の $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ や $72 = 2^3 \times 3^2$ のように、素因数分解において現れる素数を小さい順に並べて、それらを何乗かしたものの積の形で書くとき、表し方はただ1通りに決まる。

たとえば、自然数 a, b について、素数の積で表された等式 $2^a \times 3^4 = 2^5 \times 3^b$ が成り立つならば、 $a=5, b=4$ である。

$$\begin{array}{r} 5 \overline{)60} \\ 2 \overline{)12} \\ 3 \overline{)6} \\ 2 \\ 60 = 5 \times 2 \times 3 \times 2 \\ = 2^2 \times 3 \times 5 \end{array}$$

例3 84 にできるだけ小さい自然数を掛けて、ある自然数の平方にする

84 を素因数分解すると、 $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ である。

84 に 3×7 を掛けると、 $(2 \times 3 \times 7)^2 = 42^2$ となるので、

求める自然数は $3 \times 7 = 21$ である。

☒ ある自然数の平方になっているとき、指数はどうなっているかな。

問4 60 にできるだけ小さい自然数を掛けて、ある自然数の平方にしたい。どのような自然数を掛ければよいか。

☐ ☐ CHECK

たとえば、45 の約数は、1, 3, 5, 9, 15, 45 の6個であり、この6個の約数の総和は、

$$1 + 3 + 5 + 9 + 15 + 45 = 78$$

と求めることができる。しかし、自然数によっては、その約数を書き並べ、総和を求めることは大変である。ここでは、自然数の約数の個数とその総和について、素因数分解を利用した求め方を考えていく。

例題 1 45 の約数の個数とその総和を求めよ。

考え方 45 の約数がどんな数の積で表されるのかを考える。

解

45 を素因数分解すると、 $45=3^2 \times 5$ であるから、
45 の約数は、 3^2 の正の約数と 5 の正の約数の積である。

3^2 の約数は、1, 3, 3^2

5 の約数は、1, 5

であるから、右の表より、

45 の約数は、1, 3, 5, 9, 15, 45

その個数は、 $3 \times 2 = 6$ (個) である。

また、45 の約数の総和は、

$$\begin{aligned} & 1 \times 1 + 3 \times 1 + 3^2 \times 1 + 1 \times 5 + 3 \times 5 + 3^2 \times 5 \\ &= (1 + 3 + 3^2) \times (1 + 5) \\ &= 78 \end{aligned}$$

である。

	1	5
1	1	5
3	3	15
3^2	9	45

45 の約数は、
 $3^p \times 5^q$
の形になる。
ただし、
 $p=0, 1, 2$
 $q=0, 1$

問 5 素因数分解を利用して、72 の約数の個数とその総和を求めよ。

☐ ☐ CHECK

一般に、ある自然数が、 $a_1^{p_1} \times a_2^{p_2} \times \cdots \times a_n^{p_n}$ の形に素因数分解されるとき、次のことがいえる。

自然数の約数の個数とその総和

ある自然数が、 $a_1^{p_1} \times a_2^{p_2} \times \cdots \times a_n^{p_n}$ の形に素因数分解されるとき、この自然数の約数の個数は、

$$(p_1+1)(p_2+1)\cdots(p_n+1) \text{ 個}$$

その総和は、

$$\begin{aligned} & (1+a_1+a_1^2+\cdots+a_1^{p_1})(1+a_2+a_2^2+\cdots+a_2^{p_2}) \\ & \cdots (1+a_n+a_n^2+\cdots+a_n^{p_n}) \end{aligned}$$

となる。

問 6 素因数分解を利用して、504 の約数の個数とその総和を求めよ。

☐ ☐ CHECK

6! が 3 で何回割り切れるかを考えると、

$$6! = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$$

であることから、6! は、3 で 2 回割り切れることがわかる。一方で、50! のような大きな数の場合には、同じように考えて、3 で何回割り切れるかを考えるのは、計算が少し大変である。

ここでは、自然数を素因数分解したときの因数に着目する方法を使って、その方法を考えてみよう。

例題 2 次の問いに答えよ。

- (1) 50! は 3 で何回割り切れるか。
- (2) 50! は一の位からいくつ 0 が連続する整数か。

考え方

- (1) 1 から 50 までの自然数で、3, 3^2 , 3^3 の倍数の個数をそれぞれ数える。
- (2) $10 = 2 \times 5$ より、因数 2 と 5 の個数を調べればよい。

解

- (1) $50 \div 3 = 16$ 余り 2,
 $50 \div 3^2 = 50 \div 9 = 5$ 余り 5,
 $50 \div 3^3 = 50 \div 27 = 1$ 余り 23
1 から 50 までの自然数で、3, 3^2 , 3^3 の倍数がそれぞれ 16 個、5 個、1 個あるので、50! を素因数分解したときの因数 3 の個数は、
 $16 + 5 + 1 = 22$ (個)
よって、50! は 3 で **22 回** 割り切れる。
- (2) $10 = 2 \times 5$ より、因数 2 と 5 の個数を調べればよい。
 $50 \div 5 = 10$, $50 \div 5^2 = 50 \div 25 = 2$
1 から 50 までの自然数で、5, 5^2 の倍数がそれぞれ 10 個、2 個あるので、50! を素因数分解したときの因数 5 の個数は、
 $10 + 2 = 12$ (個)
因数 2 の個数は 12 個以上あるから、50! は、一の位から 0 が **12 個** 連続する。

3^2 の倍数は
3 の倍数であるが、
 3^2 の倍数の個数だけ
さらに因数 3 をもつ。
 3^3 の倍数についても
同様である。

問 7 次の問いに答えよ。

- (1) 16! は 2 で何回割り切れるか。
- (2) 16! は一の位からいくつ 0 が連続する整数か。

☐ ☐ CHECK