

大学入学共通テスト および 国公立大二次・私大

大学入試

分析と対策

2021
令和3年度

数学

学校法人 河合塾
数学科講師 瀬戸山 義治

啓林館

この冊子の内容は次のURLからもアクセスできます
<https://www.shinko-keirin.co.jp/keirinkan/kou/math/>

本稿ではいくつかの入試問題を引用していますが、紙面の都合上、出典大学名を紹介するにとどめた箇所があります。

問題文については河合塾のホームページなどをご覧ください。

0 はじめに

2021年度の大学入試が終了した。新たに大学入学共通テストも行われた今年度の入試全般についてどのような特徴がみられたか。本稿では今年度の大学入学共通テストと国公立二次・私大入試を総括し、次年度以降の学習対策を述べることにする。

1 大学入学共通テスト

2021年度は、センター試験に代わって大学入学共通テストが実施された。記述式問題や複数選択問題が見送られるなど紆余曲折があったこのテストは、2回行われた（追試験も含めると3回）。まずは2つのテストの結果をみてみよう。

2021年1月17日実施

	受験者数	平均点	標準偏差
数学I	5750	39.11	16.84
数学I・A	356493	57.68	19.49
数学II	5198	39.51	18.75
数学II・B	319697	59.93	23.62

2021年1月31日実施

	受験者数	平均点	標準偏差
数学I	44	26.11	16.32
数学I・A	1354	39.62	19.92
数学II	35	24.63	16.74
数学II・B	1238	37.40	21.05

(大学入試センターHPより作成)

受験者数を考慮して、本稿では2021年1月17日実施分の「数学I・A」、 「数学II・B」の2科目について、河合塾のもつデータなども参考にしながら分析していきたい。

(1) 大問構成

今年度の大問構成は以下ようになった。ただし、括弧内は配点、★は選択問題である。

数学I・A (試験時間70分)

大問	単元
1	[1] 数と式、2次関数 (10) [2] 図形と計量 (20)
2	[1] 2次関数 (15) [2] データの分析 (15)
3	★場合の数と確率 (20)
4	★整数の性質 (20)
5	★図形の性質 (20)

必答問題は2題、選択問題は3題から2題を選択する形で、これは昨年度のセンター試験と同じである。

また、設問数、マーク数はともに増加した。

数学II・B (試験時間60分)

大問	単元
1	[1] 三角関数 (15) [2] 指数関数・対数関数 (15)
2	微分法・積分法 (30)
3	★確率分布と統計的な推測 (20)
4	★数列 (20)
5	★ベクトル (20)

必答問題は2題、選択問題は3題から2題を選択する形で、これは昨年度のセンター試験と同じである。

また、設問数は変わらず、マーク数は減少した。

(2) 難易度の変化

難易度の変化の指標として、ここでは平均点に注目してみよう。昨年度のセンター試験の平均点は次のとおりである。参考までに、2018年度の試行調査についても掲載しておこう。ただし、試行調査の数学I・Aについてはマーク式問題分(85点満点)の平均得点率(得点/満点)を表示している。

	数学I・A	数学II・B
2021年度共通テスト	57.68	59.93
2020年度センター試験	51.88	49.03
2018年度試行調査	36.17	35.49

(大学入試センターHPより作成)

この表からわかるように、試行調査からもかなり改善されたものとなり、センター試験との比較においても

「数学I・A」, 「数学II・B」ともに易化した。

(3) 「数学I・A」の問題分析

大学入試センターは大問別平均点などを公表していないため、河合塾が実施した「答案再現分析」を参考に分析することにした。「答案再現分析」とは、受験生がどの問題にどのマークをしたかを調査したものである。今年度は「数学I・A」で8367件, 「数学II・B」で8060件のデータを収集した。なお, 「答案再現分析」による平均点は, 「数学I・A」で64.1点, 「数学II・B」で67.0点であり, 「答案再現分析」により抽出された標本は共通テスト受験生全体の母集団に比べてやや上方に分布している。

以降のデータはすべて「答案再現分析」によるものである。

では「数学I・A」の大問別平均点をみてみよう。

問題番号	満点	平均点
1 [1]	10	7.6
[2]	20	14.0
2 [1]	15	9.3
[2]	15	11.2
3	20	11.6
4	20	12.2
5	20	7.6

次に, 今回出題された問題についてのコメントと次年度以降の学習対策について述べていきたい。

第1問[1] 数と式, 2次関数

(1) は2次式を因数分解する問題。(2) は2次方程式の解についての問題。前半は正答率が9割近くある。(3) は $97-16c$ が平方数になる正の整数 c の個数を求める問題。問い自体がそれまでより難しく, 共通テストの特徴の1つである「会話文」形式の中で問われていた。この「会話文」の中に解答のヒントがあるのだが, の正答率は31%と低かった。基本の計算技術の習得だけでなく, 「会話文」の中に隠されたヒントに気づく練習が必要であろう。

第1問[2] 図形と計量

(1) は \sin と \cos の関係や三角形の面積を求める問題。三角形AIDの面積を求める問題では, 誤答として に15としたものが多かった。おそらく問題文にある図から三角形AIDが直角三角形であると勘違いし

たものであろう。(2) は $S_1-S_2-S_3=-2bc\cos A$ の符号を問う問題。角 A が鋭角, 直角, 鈍角のそれぞれに対して符号を答えるもので, 正答率は約8割。(3) は3つの三角形の面積の大小を問う問題。見た目が違う式が実はどれも真ん中の三角形の面積を表していることに気づくことがポイントとなる。正答率は40%と最も低い。普段から式の意味を考えることが大切である。

第2問[1] 2次関数

100m走を題材にした「日常の数学」の問題。ストライド, ピッチ, タイムなど語句の意味を理解するとともに, それらの関係を把握する必要がある。(2) の , だけが2次関数の問題であり, 正答率は51%。なお, , は学力上位層と中位層で最も大きく差がついた問題である。本問のような「日常の数学」は数学的には易しい問題であるが, 独特の雰囲気慣れる練習が必要である。類題を多く解いて対策したい。

第2問[2] データの分析

問題文が10ページもある。(1) は箱ひげ図を読み取る問題。正答率は9割を超えていた。(2) は箱ひげ図からヒストグラムを推定する問題。多くの図が登場するためか正答率は7割を切る。(3) は複数の散布図から相関係数の変化を読み取り, 3つの言明に対してその正誤を判定する問題。正答率は8割近い。(4) は条件を満たす散布図を答える問題。ある散布図の上下を折り返した散布図を答えさせる工夫された問題であった。正答率は6割を切る。多くの散布図を事前に用意しておくこと指導しやすいだろう。

第3問 場合の数と確率

いくつかの袋に入っている球を取り出す問題。(1) の反復試行の確率は正答率が約9割であるが, 条件つき確率の正答率は6割台であった。(3) 以降は「会話文」形式となる。その中で簡便な計算方法が示唆されているのだが, 箱が3つに増えた(3)では正答率が3割, 箱が4つに増えた(4)では正答率が2割と順当に減っていった。本問では主に条件つき確率の基本しか問われていないので, 教科書を丁寧に学習しておけば十分であろう。

第4問 整数の性質

さいころの目に従って円周上を点が移動する問題。(1) は1次不定方程式の特殊解を求める問題で, 正答率は9

割を超える。(2)の1次不定方程式の一般解を求める問題では正答率は87%。(3)は $5x-3y \equiv 8 \pmod{15}$ を解くことになるので、通常の不定方程式を解くよりも難しい。(4)は操作の最小回数が最も大きい移動先を問う問題。まじめに解けば難しいが、5つの選択肢の中から選ぶ問題なので、正答率は意外に高く36%であった。また、そのときの移動回数を問う[シ]は正答率が18%と予想どおり低い。この分野の中心に位置する1次不定方程式は確実に習得しておきたい。

第5問 図形の性質

直角三角形とその外接円についての問題。円が3つも登場するので図が描きにくかっただろう。角の二等分線の性質を問うはじめの2つの設問の正答率はそれぞれ91%、68%と比較的高い。次に続く方べきの定理を用いる問題の正答率は44%であり、これ以降の設問では正答率は4割を切る。特に最後の設問は、それまでに得られた結果をどのように利用するのか自分で方針を立てなければならず、高い思考力が要求される問題である。対策としては、二次・私大型の問題演習が効果的だろう。

(4) 「数学Ⅱ・B」の問題分析

「数学Ⅱ・B」の大問別平均点は次のとおりである。

問題番号	満点	平均点
1 [1]	15	10.3
[2]	15	9.7
2	30	21.7
3	20	5.0
4	20	14.9
5	20	11.0

次に、今回出題された問題についてのコメントと次年度以降の学習対策について述べていきたい。

第1問[1] 三角関数

三角関数を合成して関数の最大値を求める問題。(1)は係数が具体的な数値で、合成角も有名角であるため出来は非常に良かった。ただし、最大値については最大値とそれを与える θ の値をセットで答えさせるため正答率は7割台に落ちる。(2)(i)も係数が具体的な数値で、合成する必要がなく、(1)よりも簡単な設問であり、正答率は95%。(ii)以降は係数が文字になるが、[キ]は意外によくできていて正答率は76%。 \cos に合成する方法はあまり経験がないため[ク]、[ケ]の正答率

は4割台である。 \sin の場合の合成と勘違いしたようだ。(iii)は合成する必要もなく、すぐさま関数の単調性がわかるのだが、正答率は23%と低い。この設問は学力上位層をさらに二分するほど差のつく問題であった。教科書で扱う定理などは結果だけでなく証明まで含めて理解しておきたい。

第1問[2] 指数関数・対数関数

双曲線関数 $\cosh ax$ 、 $\sinh ax$ ($a = \log 2$)に関する問題。(1)はよくできていたが、指数方程式を解く最後の設問のできが悪く、正答率は30%であった。(2)は双曲線関数の相互関係を問う問題で、これも比較的よくできていた。(3)は双曲線関数の加法定理を扱う問題で、「会話文」形式であった。会話文の中に β に適当な値を入れるとよい、とヒントがあるのだが、うまく $\beta = 0$ とできたであろうか。正答率は38%で、学力上位層と中位層で差がついた。会話文の中に隠されているヒントをうまく見つけて活用する練習をしておきたい。

第2問 微分法・積分法

多項式で表される関数のグラフを扱う問題。(1)は2つの2次関数のグラフを扱う問題。はじめに具体的な関数について2つのグラフの共通する性質を問う。そのあと一般の2次関数のグラフについて考察することになり、それまでの結果を確認できる作りとなっている。 ℓ と x 軸の交点を求める問題では空欄に文字を3つも入れることになり、驚いた受験生もいただろう。この設問を除いては前半の正答率が9割近くあった。後半の積分法の問題は囲まれる図形が描きにくかったのか正答率が61%と低かった。(2)は3つの3次関数のグラフを扱う問題。[ト]まで(1)と同様の考察をするので、できはよく、正答率は85%を超える。本問のように係数に文字を多く含んだ関数であっても基本的な計算技術は身につけておきたい。

第3問 確率分布と統計的な推測

ある高校の生徒100人を抽出したときの、本を読まない生徒数の分布、および読書時間の推定に関する問題。2018年度試行調査第3問と類似の問題である。[ア]は $B(100, 0.5)$ が正解であるが、 $N(100, 0.5)$ と答えた答案が21%もあり、この設問の正答率は51%であった。この設問以降、[ソ]を除いて、正答率が35%を超えることはなかった。また、[ソ]、[タ]はセットで(配点は各2点)、6つの選択肢から2つ選ぶものであ

るが、マーク率をみると他の選択肢にも分散してマークしていた。ヤマカンで答えた受験生が多かったのかもしれない。この分野特有の用語に慣れるだけでなく、基本的な数値の求め方を整理しておくことが大切である。

第4問 数列

2つの数列を結びつける漸化式を扱う問題。問題文中にも計算方法などが示唆されていて、丁寧に誘導されている問題である。(1)の前半の正答率は9割以上、後半でも8割あった。(2)では、等差数列の和を求める設問の正答率が68%なのに対し、等比数列の和を求める設問の正答率が79%と、こちらのほうが高く出た。

(4)の最後の設問「テ」は学力上位層の正答率が70%なのに対して中位層の正答率が18%となり、大きく差がついた。またこの設問では無回答率も19%と高かった。式変形などをする際に、何をさせられていて、どのように結論を導こうとしているのかを先読みする、いわゆる「出題者の意図」を読む練習が必要だろう。

第5問 ベクトル

(1)は正五角形を題材にした平面ベクトルの問題。ベクトルの計算問題が中心であり、どの設問も正答率は8割近くあった。(2)は正十二面体を題材にした問題。ベクトルの大きさや内積の計算問題が中心であるが、設定が空間であることもあり、(1)よりも全体の正答率は20ポイント以上下がった。しかし、学力上位層はこの限りではなく、特に、内積の計算問題である「シ」では上位層と中位層でかなり大きな差がついた。問題文では計算により、四角形 OB_1DB_2 が正方形であることを示す流れであったが、図形の対称性からすぐに正方形であるとわかるため、正答率は49%と意外に高い。正四面体や立方体以外の正多面体はあまり目にする機会が多くないが、基本的な性質ぐらいは確認しておきたい。

(5) 選択問題の選択率

選択問題については、「数学I・A」では第5問(図形の性質)が、「数学II・B」では第3問(確率分布と統計的な推測)が避けられていた。以下に2問を選択した受験生の内訳を示しておこう。

数学I・A

	人数	割合
第3問・第4問選択者	5036	60.8%
第3問・第5問選択者	1730	20.9%
第4問・第5問選択者	1516	18.3%

数学II・B

	人数	割合
第3問・第4問選択者	240	3.0%
第3問・第5問選択者	146	1.9%
第4問・第5問選択者	7534	95.1%

2 国公立二次試験, 私大入試など

(1) 今年度の特徴

今年度の入試問題を語るにあたっては、コロナ禍の影響を無視することはできない。受験生たちの学習状況を考慮したと思われる大学が多かったからである。例えば、名古屋大や広島大のように理系学部の問題で、文系学部との共通問題を大幅に増やして難度を下げたり、上記2大学に加えて千葉大、静岡大、北海道大(後期)などは数学IIIの出題を控えたりした。文系学部との共通問題がなく、むしろ積極的に6問中3問以上を数学IIIからの出題とした京都大などは例外的である。

以降はいくつかのテーマに絞って今年度の入試問題を俯瞰していきたい。

(2) 「データの分析」の問題

出題数は若干減ったが、基本的な項目は全部出題されている。

- 平均値・分散…データを与えて単純に平均値・分散などを計算する問題が信州大や南山大で出題されていた。福井大では四分位範囲も求めさせている。
- 箱ひげ図・散布図…与えられた箱ひげ図から何が導けるかを問う問題が慶應義塾大や立命館大で出題されていた。また、散布図を読み取る問題が滋賀大で出題されていた。
- 他分野との融合…関数との融合問題が広島大や同志社大で出題されていた。

(3) 「整数の性質」の問題

今年度もさまざまなテーマの問題が出題されていた。

- 1次不定方程式…関西学院大では多少のヒントを与えて解く問題が、金沢大や島根大、東北大では特定の性質をもつ解をもつ条件を考える問題が出題された。
- n 進法…京都大、富山大、山形大、早稲田大、名城大など多くの大学で出題されている。
- ユークリッドの互除法…琉球大、奈良県立医科大などで出題されている。
- 素数…論証問題になることも多く、次の京都大の問題がその典型例であろう。

p が素数ならば p^4+14 は素数でないことを示せ。

また、次の一橋大の問題はいろいろな方法が考えられるが、見た目以上に難しい。

1000以下の素数は250個以下であることを示せ。

- 有理点…曲線上にある有理点に関する問題が滋賀医科大で出題された。
- 二項係数…今年度は二項係数に関する整数問題が目立った。東京大、東京工業大、九州大、大阪医科薬科大などで出題され、いずれも難問である。
- $n!$ が素数 p で何回割りきれるか…このテーマの問題も立命館大、上智大などで出題された。

(4) 「確率」の問題

(場合の数) \div (場合の数)の問題や確率漸化式の問題などは例年どおり多く出題されているが、今年度では「検査」についての問題が県立広島大、上智大、関西医科大などで出題されていた。

(5) 「空間ベクトル」の問題

教科書では発展扱いの平面の方程式に関する出題があった。平面の方程式を導く問題が立命館大で、平面の方程式を直接問う問題が京都府立大で出題された。また、平面の方程式を知っていると有利な問題が京都大で出題された。

(6) 「数列」の問題

整数や確率などの他分野との融合問題も含めて例年どおりの出題であった。確率との融合問題で、4項間漸化式 $p_n=(1-\alpha)p_{n-1}+\alpha p_{n-3}$ を扱う問題が大阪市立大で出題された。

(7) 「微分法・積分法(数学Ⅲ)」の問題

出題数は1割ぐらい減少した感がある。次の大阪大の問題は複接線の問題。4次関数以外で複接線を扱う問題は珍しい。

次の問いに答えよ。

- (1) a を実数とする。 x についての方程式

$x - \tan x = a$ の実数解のうち、 $|x| < \frac{\pi}{2}$ をみたすものがちょうど1個あることを示せ。

- (2) 自然数 n に対し、 $x - \tan x = n\pi$ かつ

$|x| < \frac{\pi}{2}$ をみたす実数 x を x_n とおく。 t を

$|t| < \frac{\pi}{2}$ をみたす実数とする。このとき、曲線

$C: y = \sin x$ 上の点 $P(t, \sin t)$ における接線が、不等式 $x \geq \frac{\pi}{2}$ の表す領域に含まれる点においても曲線 C と接するための必要十分条件は、 t が x_1, x_2, x_3, \dots のいずれかと等しいことであることを示せ。

(8) 「入試問題トピックス」

次の問題は「2021」に絡めた東京大の問題。二項係数に関する問題は東京大では頻出である。なお、「2021」に絡めた問題は同志社大などでも出題されている。

以下の問いに答えよ。

- (1) 正の奇数 K, L と正の整数 A, B が $KA = LB$ を満たしているとする。 K を4で割った余りが L を4で割った余りと等しいならば、 A を4で割った余りは B を4で割った余りと等しいことを示せ。

- (2) 正の整数 a, b が $a > b$ を満たしているとする。このとき、 $A = {}_{4a+1}C_{4b+1}$ 、 $B = {}_aC_b$ に対して $KA = LB$ となるような正の奇数 K, L が存在することを示せ。

- (3) a, b は(2)の通りとし、さらに $a-b$ が

2で割り切れるとする。 ${}_{4a+1}C_{4b+1}$ を4で割った余りは ${}_aC_b$ を4で割った余りと等しいことを示せ。

(4) ${}_{2021}C_{37}$ を4で割った余りを求めよ。

(2)は ${}_{4a+1}C_{4b+1}$ を実際に分数で書き表すとよい。分子の4の倍数の因子と分母の4の倍数の因子がそのまま ${}_aC_b$ となる。残りは2の倍数の因子を2で約分すると結果的に奇数の因子だけになり証明が完結する。なお、

(3)は $a-b$ が2で割り切れなくても命題は成り立つ。

最後にもう1つだけトピックスを紹介する。奈良県立医科大の問題である。

k を正整数, m_1, m_2, \dots, m_k を正の実数, さらに m, r を正整数とする。

(1) 集合 T を

$$T = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i m_i \mid a_1, a_2, \dots, a_k \text{ は整数,} \right. \\ \left. \text{かつ任意の } 1 \leq i \leq k \text{ に対して } a_i \geq 0 \right\}$$

と定義する。 β を実数とする。このとき, 正の実数 γ が存在し, 以下の条件(F)をみたすことを証明せよ。

条件(F): $x \in T$ について $x > \beta$ ならば,
 $x - \beta \geq \gamma$ 。

(2) 集合 S を

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{a_i m_i}{r} \mid a_1, a_2, \dots, a_k \text{ は整数,} \right. \\ \left. \text{かつ任意の } 1 \leq i \leq k \text{ に対して } a_i \geq -m \right\}$$

と定義する。このとき, 正の実数 h が存在し, 以下の条件(M)をみたすことを証明せよ。

条件(M): $x \in S$, $x > 0$ ならば $x \geq h$ 。

(1)は $T' = \{x \mid x \in T, x > \beta\}$ に最小の元が存在することを示せばよい。そのためには T' の元 x' を1つ固定して, β と x' の間に T の元が有限個しかないことを示せばよい。結局, x' 以下の T の元が有限個しかないことを示すことになる。題意を把握することも証明のアイデアも難しい難問である。

3

おわりに

今年度の入試の目玉は何といっても大学入学共通テストであろう。コロナ禍の中で未知の新しいテストと戦った受験生はよく頑張ったと思う。筆者は新テストについて, 2015年度の「スーパームーンの問題」からその動静をずっと追いかけていて, ようやく1つの完成形をみる事ができて一段落ついた感があった。

国公立二次試験, 私大入試では, 個別には難問もあるものの全体的に昨年度と比べてやや易化した印象がある。これは今年度の特殊性によるものだと思う。共通テストの影響を受けつつも次年度以降は元に戻るのではないだろうか。

本稿が読者諸兄の一助になれば幸いである。

瀬戸山 義治 (せとやま・よしはる)

近畿地区にて主に東大等をめざすトップレベル生を対象とした講座で指導を行っている。これまで数多くのテキストや, 「京大オープン」「全統記述模試」をはじめとする模試の作成に携わり, 現在は共通テストや個別入試の分析を元に, 教材・模試作成チームへのアドバイスをを行っている。



—— 知が啓く。——

啓林館

URL <https://www.shinko-keirin.co.jp/>

令和 4 教 内容解説資料

本 社	〒 543-0052	大阪市天王寺区大道 4 丁目 3 番 25 号	電話 (06)6779-1531	FAX(06)6779-5011
東京支社	〒 113-0023	東京都文京区向丘 2 丁目 3 番 10 号	電話 (03)3814-2151	FAX(03)3814-2159
北海道支社	〒 060-0062	札幌市中央区南二条西 9 丁目 1 番 2 号サンケン札幌ビル 1 階	電話 (011)271-2022	FAX(011)271-2023
東海支社	〒 460-0002	名古屋市中区丸の内 1 丁目 15 番 20 号 ie 丸の内ビルディング 1 階	電話 (052)231-0125	FAX(052)231-0055
広島支社	〒 732-0052	広島市東区光町 1 丁目 7 番 11 号広島 CDビル 5 階	電話 (082)261-7246	FAX(082)261-5400
九州支社	〒 810-0022	福岡市中央区薬院 1 丁目 5 番 6 号ハイヒルズビル 5 階	電話 (092)725-6677	FAX(092)725-6680