1 $a-b+c=0$ のとき，等式 $b^2-ab=c^2+ca$ が成り立つことを証明せよ。

＜解①＞

$a-b+c=0$ より　$b=a+c$ であるから

$$(左辺)=(a+c)^2-a(a+c)$$
$$=a^2+2ca+c^2-a^2-ca$$
$$=c^2+ca$$

よって，$b^2-ab=c^2+ca$ □

＜解②＞

$a-b+c=0$ より

$b-a=c$，$c+a=b$ であるから

$(左辺)=b(b-a)=bc$

$(右辺)=c(c+a)=bc$

よって，$b^2-ab=c^2+ca$ □

＜解③＞

$$(左辺)-(右辺)=b^2-ab-c^2-ca$$
$$=-(b+c)a+(b^2-c^2)$$
$$=-(b+c)a+(b+c)(b-c)$$
$$=(b+c)\{-a+(b-c)\}$$
$$=-(b+c)(a-b+c)$$
$$=0 \quad (\because a-b+c=0)$$

よって，$b^2-ab=c^2+ca$ □

2 $a>0$，$b>0$ のとき，不等式 $\sqrt{ab} \geqq \dfrac{2ab}{a+b}$ が成り立つことを証明せよ。

＜解①＞

$$(\sqrt{ab})^2-\left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2=ab-\frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}$$
$$=\frac{ab(a+b)^2-4a^2b^2}{(a+b)^2}$$
$$=\frac{ab\{(a+b)^2-4ab\}}{(a+b)^2}$$
$$=\frac{ab(a^2-2ab+b^2)}{(a+b)^2}$$
$$=\frac{ab(a-b)^2}{(a+b)^2} \geqq 0$$

ゆえに，$(\sqrt{ab})^2 \geqq \left(\dfrac{2ab}{a+b}\right)^2$

$\sqrt{ab}>0$，$\dfrac{2ab}{a+b}>0$ であるから

$$\sqrt{ab} \geqq \frac{2ab}{a+b}$$ □

＜解②＞

$$\sqrt{ab}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{\sqrt{ab}(a+b)-2ab}{a+b}$$
$$=\frac{\sqrt{ab}(a-2\sqrt{ab}+b)}{a+b}$$
$$=\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b} \geqq 0$$

よって，$\sqrt{ab} \geqq \dfrac{2ab}{a+b}$ □

3 $a>0$，$b>0$ のとき，不等式 $\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\left(1+\dfrac{4b}{a}\right) \geqq 9$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つ場合を調べよ。

$$(左辺)=1+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}+4=\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}+5$$

$\dfrac{a}{b}>0$，$\dfrac{b}{a}>0$ であるから

相加平均と相乗平均の大小関係より

$$\frac{a}{b}+\frac{4b}{a} \geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{4b}{a}}=4$$

よって，$\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a} \geqq 4$

$$\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}+5 \geqq 9$$

したがって　$\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\left(1+\dfrac{4b}{a}\right) \geqq 9$

また，等号が成り立つのは　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{4b}{a}$

すなわち　$a>0$，$b>0$ であるから $a=2b$ のとき □

＜2の解③＞

$\dfrac{1}{a}>0$，$\dfrac{1}{b}>0$ であるから

相加平均と相乗平均の大小関係より

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} \geqq \sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}=\frac{1}{\sqrt{ab}}$$

$$\therefore \frac{a+b}{2ab} \geqq \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

両辺は正であるから　$\sqrt{ab} \geqq \dfrac{2ab}{a+b}$ □