平面（2次元）と空間（3次元）の類似点と相違点

　ベクトルの便利なところは，平面（2次元）での扱い方と空間（3次元）での扱い方がほとんど同じであるということにある。平面（2次元）での扱い方と空間（3次元）での扱い方が同じ点と異なる点を整理する。

平面の公式は平面のみ，空間の公式は空間のみと分けて覚えることは効率が悪い。しっかり意味を理解し，平面と空間の公式を同じものとして理解すること。

　基本的には，平面(2次元)と空間(3次元)で公式や定理の $\boxed{\text{ベクトル表示}}$ は変わらない。

ただし，$\boxed{\text{成分表示}}$ は z 成分が新たに加わる。

　以後，説明の為に登場する点の座標は

平面：$O(0,\ 0)$，　$A(a_1,\ a_2)$，　$B(b_1,\ b_2)$，　$C(c_1,\ c_2)$

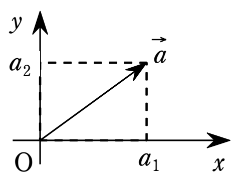
空間：$O(0,\ 0,\ 0)$，$A(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$B(b_1,\ b_2,\ b_3)$，$C(c_1,\ c_2,\ c_3)$　とする。

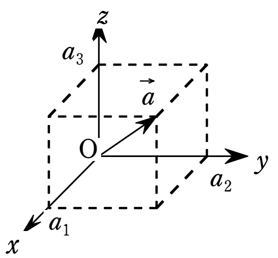
0. 成分

平面では(x 成分， y 成分)であったのが，空間では(x 成分， y 成分， z 成分)

平面：$\overrightarrow{OA}=\vec{a}=(a_1,a_2)$　，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}=(b_1,b_2)$　，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}=(c_1,c_2)$

空間：$\overrightarrow{OA}=\vec{a}=(a_1,a_2,\underline{a_3})$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}=(b_1,b_2,\underline{b_3})$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}=(c_1,c_2,\underline{c_3})$





1. ベクトルの和・差・定数倍

平面(2次元)の場合と空間(3次元)の場合で，基本的な計算方法は同じ。ただし，成分表示したときに z 成分がつく。

ベクトルの和

	ベクトル表示	成分表示
平面：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=$	$\vec{a}+\vec{b}$	$=(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_2,a_2+b_2)$
空間：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=$	$\vec{a}+\vec{b}$	$=(a_1,a_2,\underline{\underline{a_3}})+(b_1,b_2,\underline{\underline{b_3}})=(a_1+b_2,a_2+b_2,\underline{\underline{a_3+b_3}})$

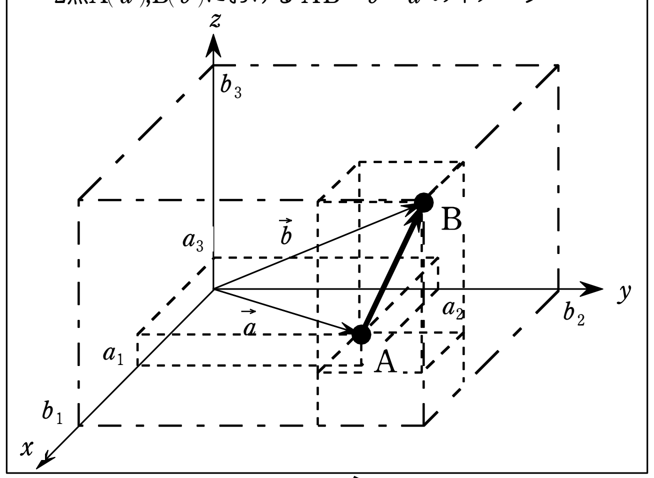
ベクトルの差

	ベクトル表示	成分表示
平面：$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=$	$\vec{a}-\vec{b}$	$=(a_1,a_2)-(b_1,b_2)=(a_1-b_1,a_2-b_2)$
空間：$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=$	$\vec{a}-\vec{b}$	$=(a_1,a_2,\underline{\underline{a_3}})-(b_1,b_2,\underline{\underline{b_3}})=(a_1-b_1,a_2-b_2,\underline{\underline{a_3-b_3}})$

ベクトルの定数倍

	ベクトル表示	成分表示
平面：	$k\overrightarrow{OA}=k(a_1,a_2)$	$=(ka_1,ka_2)$
空間：	$k\overrightarrow{OA}=k(a_1,a_2,\underline{a_3})$	$=(ka_1,ka_2,\underline{ka_3})$

2点$A(\vec{a})$,$B(\vec{b})$における $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ のイメージ



2. ベクトルの大きさ $|\vec{a}|$ と2点間の距離AB（$\overrightarrow{AB}$ の大きさ）

ベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の大きさ

	ベクトル表示		成分表示
平面：ベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$　の大きさ	$\lvert\vec{a}\rvert$	$=$	$\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$
空間：ベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の大きさ	$\lvert\vec{a}\rvert$	$=$	$\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+\underline{\underline{a_3{}^2}}}$

※空間でも平面でも，大きさは各成分の2乗の和のルート

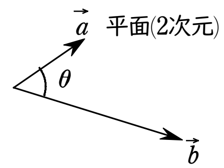
2点間の距離AB($\overrightarrow{AB}$ の大きさ)

	ベクトル表示		成分表示
平面：$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=$	$\lvert\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\rvert$	$=$	$\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$
前後	後 − 前		後 − 前　後 − 前
			x 成分　y 成分
空間：$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=$	$\lvert\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\rvert$	$=$	$\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^3}$
前後	後 − 前		後 − 前　後 − 前　後 − 前
			x 成分　y 成分　z 成分

3. 内積

内積の定義　なす角をθとする。($0\leqq\theta\leqq 180°$)

始点を揃えたときの角度の小さい方をなす角とするのは変わらない。



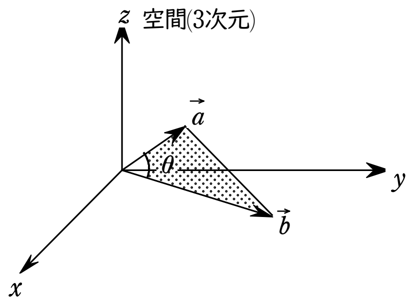
ベクトル表示　成分表示

平面：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta = a_1b_1+a_2b_2$

x　y

空間：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

x　y　z



なす角θを求める式

ベクトル表示　成分表示

平面：$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}}$

空間：$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+\underline{\underline{a_3{}^2}}}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2+\underline{\underline{b_3{}^2}}}}$

4. 垂直条件[FGⅡBp586,666]

「内積0なら垂直」は平面(2次元)・空間(3次元)問わず成り立つ法則

ベクトル表示　成分表示

平面：$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB} \iff \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0 \iff a_1b_1+a_2b_2=0$

空間：$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB} \iff \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0 \iff a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

5. ベクトルの分点の位置ベクトル[FGⅡB例題374，387，388]

平面(2次元)から空間(3次元)になったことで，成分表示するときに新たにz成分が加わる。

Ⅰ　内分点　線分ABを$m：n$に内分する点P($\vec{p}$)

ベクトル表示　成分表示

平面：$\overrightarrow{OP}=\dfrac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}=\left(\dfrac{na_1+mb_1}{m+n},\dfrac{na_2+mb_2}{m+n}\right)$

x成分　y成分

↓　↓

$\vec{p}$　$\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$　←位置ベクトルでの表示

空間：$\overrightarrow{OP}=\dfrac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}=\left(\dfrac{na_1+mb_1}{m+n},\dfrac{na_2+mb_2}{m+n},\dfrac{na_3+mb_3}{m+n}\right)$

x成分　y成分　z成分

↓　↓

$\vec{p}$　$\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$　←位置ベクトルでの表示

Ⅱ　外分点　線分ABを$m：n$に外分する点Q($\vec{q}$)⇒ABを$m：(-n)$に内分する点と考える！

ベクトル表示　成分表示

平面：$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{(-n)\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+(-n)}=\left(\dfrac{(-n)a_1+mb_1}{m+(-n)},\dfrac{(-n)a_2+mb_2}{m+(-n)}\right)$

x成分　y成分

↓　↓

$\vec{q}$　$\dfrac{(-n)\vec{a}+m\vec{b}}{m+(-n)}$　←位置ベクトルでの表示

空間：$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{(-n)\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+(-n)}=\left(\dfrac{(-n)a_1+mb_1}{m+(-n)},\dfrac{(-n)a_2+mb_2}{m+(-n)},\dfrac{(-n)a_3+mb_3}{m+(-n)}\right)$

x成分　y成分　z成分

↓　↓

$\vec{q}$　$\dfrac{(-n)\vec{a}+m\vec{b}}{m+(-n)}$　←位置ベクトルでの表示

Ⅲ　中点　線分ABの中点M($\vec{m}$)⇒ABを1：1に内分する点と考える！

ベクトル表示　成分表示

平面：$\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=\left(\dfrac{a_1+b_1}{2},\dfrac{a_2+b_2}{2}\right)$

x成分　y成分

↓　↓

$\vec{m}$　$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$　←位置ベクトルでの表示

空間：$\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=\left(\dfrac{a_1+b_1}{2},\dfrac{a_2+b_2}{2},\dfrac{a_3+b_3}{2}\right)$

x成分　y成分　z成分

↓　↓

$\vec{m}$　$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$　←位置ベクトルでの表示

Ⅳ　三角形ABCの重心G($\vec{g}$)の位置ベクトル

3点の位置ベクトルを足して3で割ることは平面(2次元)でも空間(3次元)でも同じ！

ベクトル表示　成分表示

平面：$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}=\left(\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3},\dfrac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$

x成分　y成分

↓　↓

$\vec{g}$　$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$　←位置ベクトルでの表示

空間：$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}=\left(\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3},\dfrac{a_2+b_2+c_2}{3},\dfrac{a_3+b_3+c_3}{3}\right)$

x成分　y成分　z成分

↓　↓

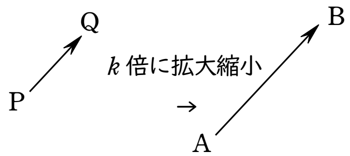
$\vec{g}$　$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$　←位置ベクトルでの表示

5．平行条件

平面(2次元)でも空間(3次元)でも，平行ならば一方のベクトルの定数倍がもう一方のベクトルになる。

平面：「$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{PQ}$」$\Leftrightarrow$「$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{PQ}$ となる実数 k が存在する。」

空間：「$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{PQ}$」$\Leftrightarrow$「$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{PQ}$ となる実数 k が存在する。」

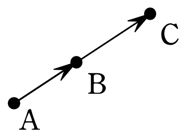


6．共線条件（3点が一直線上にある条件）

Ⅰ　3点A，B，Cが一直線上にある条件

平面：$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k が存在する。

空間：$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k が存在する。

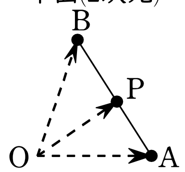


Ⅱ　点Pが直線AB上にある条件

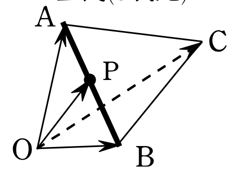
平面：$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$　$(s+t=1)$

空間：$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$　$(s+t=1)$

平面(2次元)



空間(3次元)



7．共点条件（点が一致する条件）　FGⅡＢ例題385

位置ベクトルが等しい点は，同じ点である。また，同一の点ならば位置ベクトルが等しい。

点P，点Q，点Rが同じ点であることは　平面：$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OR}$　$\vec{p}=\vec{q}=\vec{r}$

空間：$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OR}$　$\vec{p}=\vec{q}=\vec{r}$

8．三角形OABの面積

ベクトル表示　　成分表示

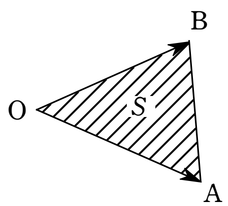
平面：$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}\quad=\quad\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$

空間：$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}\quad=\quad\frac{1}{2}\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}$

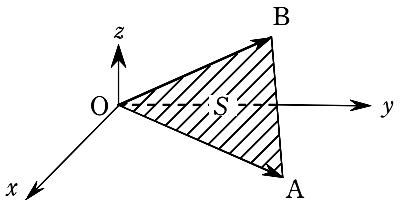
空間の成分表示は覚えなくてよい。大学1年生ですぐ習う。

外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ というものを知れば，なるほどとなる。

平面(2次元)



空間(3次元)

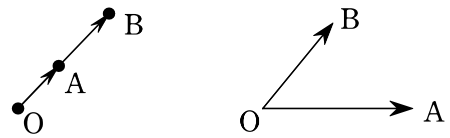


9．一次独立[FGⅡＢp582，665]

平面：$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ が1次独立(3点O，A，Bが一直線上にない。)

→式で表すと　$\overrightarrow{OA}\fallingdotseq\vec{0}$ かつ $\overrightarrow{OB}\fallingdotseq\vec{0}$ かつ $\overrightarrow{OA}\nparallel\overrightarrow{OB}$

例)　×一次独立でない　　○一次独立である



① $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ のただ1通りに表せる。

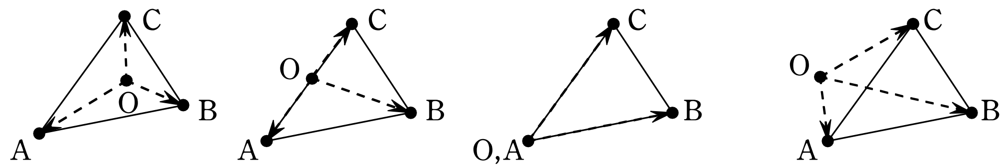
（平面上の点は，1次独立である2つのベクトルでただ1通りに表せる）

② $s_1\overrightarrow{OA}+t_1\overrightarrow{OB}=s_2\overrightarrow{OA}+t_2\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow s_1=s_2$ かつ $t_1=t_2$（係数比較できる）

空間：$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ が1次独立(4点O，A，B，Cが同一平面上にない。)

→式で表すと　$\overrightarrow{OA}\fallingdotseq\vec{0}$ かつ $\overrightarrow{OB}\fallingdotseq\vec{0}$ かつ $\overrightarrow{OC}\fallingdotseq\vec{0}$ かつ $\overrightarrow{OA}\nparallel\overrightarrow{OB}$ かつ $\overrightarrow{OB}\nparallel\overrightarrow{OC}$ かつ $\overrightarrow{OC}\nparallel\overrightarrow{OA}$

例)　×一次独立でない　×一次独立でない　×一次独立でない　○一次独立である



① $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$ のただ1通りに表せる。

（空間の点は，1次独立である3つのベクトルでただ1通りに表せる）

② $s_1\overrightarrow{OA}+t_1\overrightarrow{OB}+u_1\overrightarrow{OC}=s_2\overrightarrow{OA}+t_2\overrightarrow{OB}+u_2\overrightarrow{OC}\Leftrightarrow s_1=s_2$ かつ $t_1=t_2$ かつ $u_1=u_2$

（係数比較できる）

10．共面条件（点Pが3点ABCを通る平面上にある条件）［空間のみ］ [FGⅡＢ 例題386，387，p685]

点Pが3点A,B,Cを通る平面上にある条件(4点A,B,C,Pが同一平面上にある条件とも言われる。)

① $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ となる実数 s，t が存在する。

② $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$ $(s+t+u=1)$ ←大切，とてもよく使う。