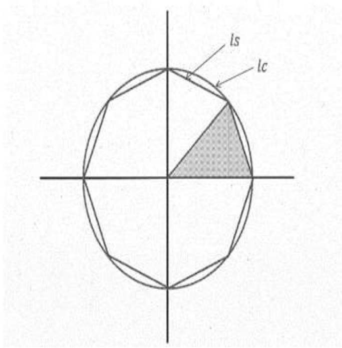
（ A先生の作問）

太郎君はわからない問題があったので, 先生に質問してみた。以下の会話文を読み, 問いに答えよ。

先生：太郎君どうしたんだい？

太郎：「円周率 π が 3.05 よりも大きいことを証明せよ。」という問題を解いていたんですが, まず何から手を出していいか見当もつかなくて…。

先生：あぁ～。それはユニークな問題だね。一緒に考えてみよう！
いろんな証明方法があるんだけど,
例えば円に内接する正八角形を用いる解法で証明してみようか。
まず, 単位円と内接する正八角形を描いてごらん。

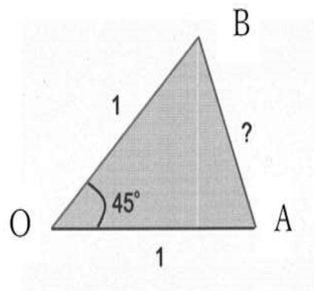


太郎：はい。こんな感じですよね。

先生：そうだね。円周の長さを l_c , 正八角形の周の長さを l_s とすると
どんな関係が成り立つかな？

太郎：（　ア　）です。

先生：そうだね。太郎君が描いてくれた図に少し色を付けてみると, 合同な三角形が 8 つあることが分かるね。じゃあ, $\angle AOB =$ （　イ　）だね。
AB の長さを求めるためには, どんな定理を使えばいいんだっけ？



太郎：（　ウ　）定理です。

先生：大正解！（　ウ　）定理を使って, AB の長さを求めてみよう。
じゃあ, あとは太郎君 1 人で頑張れると思うから, ヒントだけ言うね。
①　$l_s =$ （　エ　） AB , $l_c =$ （　オ　）である。
②　（　ア　）の関係を利用する。
③　②で出てくる不等式を解く。

(1) 上記の（ア）～（オ）に適する数字や文字, 関係式を答えなさい。
ただし,（イ）,（オ）は弧度法を用いて答えよ。
また,（ウ）に当てはまるものは複数個あるが, その中から 1 つを記入しなさい。

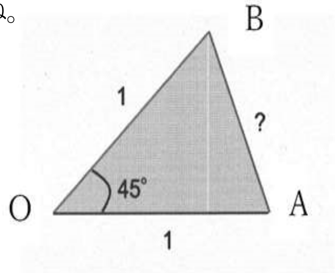
(ア)	$l_c > l_s$	(イ)	$\frac{\pi}{4}$	(ウ)	正弦 or 余弦
(エ)	8	(オ)	2π		

(2) 上記の会話文およびヒント① ② ③ を参考にし, 円周率 π が 3.05 よりも大きいことを証明せよ。
ただし, 次のことを用いてもよい。

$\sqrt{2} = 1.414$, $\sin\frac{3}{8}\pi = 0.925$, $\cos\frac{3}{8}\pi = 0.395$, $\tan\frac{3}{8}\pi = 2.389$

(発展問題) あれから早 1 年。太郎君はすっかり成長し, 高校数学の内容を一通り終えた。

太郎：先生, 1 年前にした質問覚えてますか？僕はまだ, 納得いってないことがあって…。
先生：覚えてるよ。何に納得いってないの？
太郎：円周率は 3.1415… って覚えてたのに, 3.05 よりも大きいことを証明しても何か大雑把すぎてすごく気持ち悪いんです。もっと精度をあげて, 3.14 よりも大きいことは証明できないんですか？
先生：確かにね。太郎君の疑問はもっともなことだと思うよ。あの問題は正八角形を利用して, 証明したよね。太郎君の要望に応えるために, 単位円に内接する正六十四角形を考えてみよう。
太郎：せ, 正六十四角形！！なんじゃそりゃ！
先生：驚くのも, 無理もないね。まぁ, 一緒に考えてみよう。
正六十四角形の場合だと $\angle AOB =$ （ カ ）だね。
余弦定理を用いて, 辺 AB の長さを求めると, $AB =$ （ キ ）だね。
正八角形の場合と同じように,
① $l_s =$ （ ク ） AB , $l_c =$ （ オ ）である。
② （ ア ）の関係を利用する。
③ ②で出てくる不等式を解く。
の流れでやってみよう。

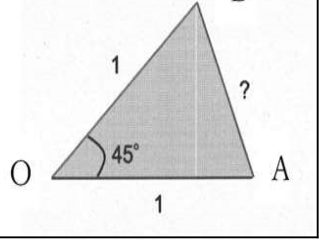


(3) 上記の（カ）, （キ）に適する数字や文字を答えなさい。
ただし, （カ）, （キ）は弧度法を用いて答えよ。

(ｶ)	$\dfrac{\pi}{32}$	(ｷ)	$2\sin\dfrac{\pi}{64}$	(ｸ)	64

(4) 上記の会話文およびヒント① ② ③を参考にし, 円周率πが 3.14 よりも大きいことを証明せよ。
ただし, $\sin\dfrac{\pi}{64} = 0.049067$ であることを用いてよい。

太郎：先生, これって内接する多角形の頂点の数をどんどん増やしていけば, より近似の精度が上がるってことですか？
先生：いい質問だね！じゃあ, 一般の多角形で考えてみようか。
つまり, 単位円に内接する正 n 角形の場合はどうなるか考えてみよう！
太郎：楽しくなってきましたね！
先生：これもさっきと同じように考えると, 正 n 角形の場合では
$\angle AOB =$ （ ケ ）だね。
余弦定理を用いて, 辺 AB の長さを求めると, $AB =$ （ コ ）だね。
あとは毎度おなじみの
① $l_s =$ （ サ ） AB , $l_c =$ （ オ ）である。
② （ ア ）の関係を利用する。
③ ②で出てくる不等式を解く。
で関係性を表してみよう。



(5) 上記の（ケ），（コ），（サ）に適する数字や文字を答えなさい。
ただし，弧度法を用いて答えよ。

(ケ)	$\frac{2\pi}{n}$	(コ)	$2\sin\frac{\pi}{n}$	(サ)	n

太郎：先生！できました！
先生：太郎君，よくできてるね。じゃあ最後にこの不等式の右辺を l_n としてみようか。
極限の勉強はもう終わってるよね。最後に $\lim_{n\to\infty} l_n$ を求めてみよう。
どうなるかな？

(7) 上記の会話文を参考に $\lim_{n\to\infty} l_n$ を求めよ。

(8) （おまけ）どうして先生は～～～のような発言をしたのか説明しなさい。

（B先生）

太郎さんと花子さんは数学の問題について考えている。
会話文を読み，以下の問いに答えよ。ただし，必要ならば $\sqrt{2}=1.414$, $\sqrt{6}=2.449$ としてよい。

問題
円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ。

太郎：単位円で考えると円周率πは面積の値として出てくるね。
花子：じゃあ面積に注目して考えてみましょう。
円に内接する正多角形の面積は円の面積より小さくなるわね。
単位円に内接する正十二角形について考えてみようよ。
太郎：正十二角形は各頂点から，円の中心に向かって線を引くと 12 個の三角形に分けられるから，
正十二角形の面積は
$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot(\text{ア})=12(\text{イ})$$
つまり，（円の面積）＞　（円に内接する多角形の面積）より，π ＞（　イ　）であることが分かったね。
花子：でもこれだと問題の証明にはなっていないわね。今度は正二十四角形で考えてみよう。

(1) 下線部について単位円とは何か説明しなさい。

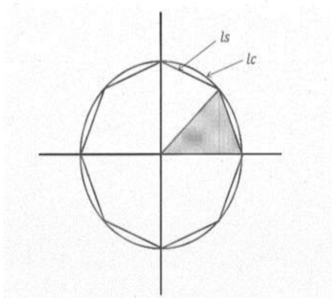
(2) （ア）に当てはまるものとて適切なものを以下から選べ。また，（イ）に当てはまる値を求めよ。
① $\sin 30°$　② $\cos 30°$　③ $\tan 30°$ ④ $\sin 60°$ ⑤ $\cos 60°$ ⑥ $\tan 60°$

太郎：さっきと同じように考えると，$\sin 15°$ の値を求める必要があるね。
花子：$15°=45°-30°$ であることから，加法定理を利用して求められそうね。
太郎：よし，問題の証明を完成させよう。

(3) 波線部の花子さんの発言を参考に，$\sin 15°$ の値を求めよ。

(4) これまでの太郎さんと花子さんの会話文をもとに問題の証明を完成させよ。

（C先生）



先生：右図のような, 半径 1 の円に内接する正八角形を考えてみよう。

太郎：なぜ正八角形なんですか。

先生：いい質問ですね～。

それでは, 次の式を見てみよう。

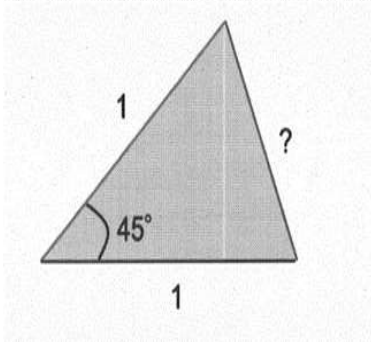
図 1 の三角形に着目すると,（　あ　）を用いて,

次のような式ができるよ。

$l_s{}^2=(ア)^2+(イ)^2-2(ア)(イ)\cos(ウ)$ …（※）

$=(エ)$

よって, $l_s=(オ)$ となる。



太郎：先生！なぜ正八角形なのかがわかりました。

(ウ) を有名角にするためですね。

ということは, 正十二角形で考えてもいいですよね。

先生：その通り！さすがですね。もちろんいいですよ。

実は, 有名角以外においても考えることができますよ。

次に, 円周の長さと正十二角形の周の長さの大小関係が次のようになることもわかるよね。

（円周の長さ） $\boxed{}$ （正十二角形の周の長さ）

太郎：はい。わかります。

先生：では, それぞれの長さを計算して不等式を作るとどうなるかな。

太郎：2π $\boxed{}$ （カ）

よって, π ＞（キ）

先生：そうですね。

(1) (ア)～(キ) に適する値を書きなさい。また,（あ）には適する定理名, $\boxed{}$ には適する不等号を答えなさい。

先生：両辺が正の数であるから平方完成してみよう。

太郎：$\pi^2>(ク)$ となります。

先生：そうですね。さらに, $\sqrt{2}=1.414$ として, 右辺の計算をすると

$(ク)=(ケ)$

よって, $\pi^2>(ケ)$

一方, $3.05^2=(コ)$ であるから, $\pi^2>(ケ)>(コ)=3.05^2$

よって, $\pi>3.05$ が示されたね。

太郎：先生, 証明できましたね。

先生：はい。では, 別解として冒頭で言ったように有名角以外についても考え,

証明してみよう。

(2)（ク）～（コ）に適する値を書きなさい。

(3) ＿＿＿＿の場合において考える。半径 1 の円に内接する正二十四角形について考え,

証明しなさい。その際に, 以下の 2 つのキーワードを必ず用いなさい。

ただし, $\sqrt{6}=2.44$, $\sqrt{2}=1.41$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ を用いてよい。

（キーワード）

① $\sin 15°=\sin(45°-30°)$

②面積

（D先生）

太郎：こんなの簡単ですよ！ $\pi = 3.14$ だから 3.05 より大きい！

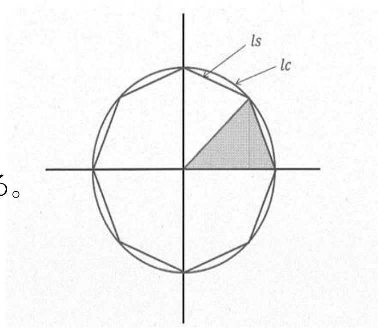
先生：確かにそうだね。じゃあ聞くけど, π が 3.14 と言えるのはどうして？

太郎：それは学校で習ったからです。

先生：よく勉強してきたんだね。でも, 証明って「人に聞いたから」「そう習ったから」ではダメなんだ。

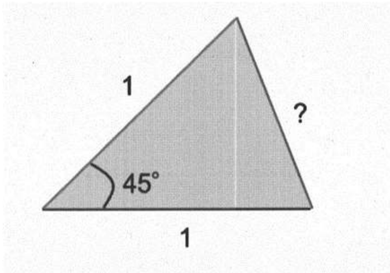
太郎：じゃあ, どうすればいいんですか。

先生：計算などを使って, 数学的に証明する必要があるんだよ。
よし, 実際にやってみよう。
この図は半径が 1 の円とそれに内接する正八角形が描かれている。
じゃあまず, 半径 1 の円周の長さは？



太郎：それはわかる！（　ア　）ですね。

先生：よし！じゃあ, 次は円に内接する正八角形の辺の長さを求めるよ。
下の図は, 正八角形の一部である三角形を抜き出したものだ。
これは二等辺三角形だね。正八角形にはこれが 8 つある。



太郎：はい。この　？　の長さを求めて, 8 倍すれば
正八角形の辺の長さになりますね！

先生：そう！そのためには, 余弦定理を使ってみよう！

(1)（　ア　）に当てはまる数字を円周率πを用いて求めなさい。

(2) 波線部＿＿＿より, 二等辺三角形とはどのような三角形か説明しなさい。

(3) 余弦定理を用いて, 正八角形の辺の長さを求めなさい。

太郎：ふぅ…。やっと計算できたよ。

先生：よくできたね。まだまだ楽しいのはここからだよ！次に, この円と周とそれに内接する正八角形の辺の長さを比べると, どっちのほうが大きくなるかな？

太郎：それは, 円周のほうが大きくなります！

先生：そうだね。じゃあ, それを数式にしてみよう。

(4) 下線部＿＿＿より, 円周と正八角形の辺の長さの大小関係を数式で表しなさい。

(5) (4) の数式を使って, この証明を完成させなさい。ただし, $\sqrt{2} = 1.41$ として計算せよ。

(6) 円周率πが 3.10 より大きくなることを正十二角形を用いて証明しなさい。ただし. $\sqrt{3} = 1.73$ として計算しなさい。

（E先生）

太郎：円周率ってπで表してたよね。それで確かだいたい3.14だったかな。

花子：そうね。 3.14のあとにもずっと数字が続いていたわ。円周率のように小数点以下がずっと続いていくものを（　ア　）小数というの。

太郎：$\frac{1}{3}$なんかも（　ア　）小数だよね。円周率と$\frac{1}{3}$の違いって何だっけ？

(1) （　ア　）に適する言葉を, 書きなさい。

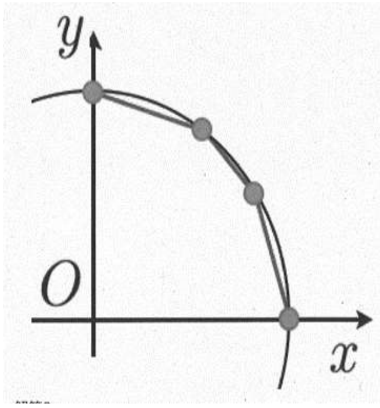
(2) 　　　部について, 説明しなさい。

太郎：まず, 円周率の問題だから円をかいて考えてみようか。

花子：円をかくときに, 授業ではよく単位円を描いていたけれど, 今回もそうしてみようかしら。

太郎：そうだね。あとは大小関係を問う問題だから, 円と何か別のものの大きさを比べてみるのはどうかな。例えば正方形とか。

(3) 　　　について, 説明しなさい。



最初のとっかかりが思いつかないので,
太郎さんと花子さんは先生に質問に行くことにした。

先生：円周と多角形の周の長さを比較してみればいいよ。
あとは, 今回は単位円ではなくて, 半径5の円にするといいよ。
そうすると, 円周上にx座標, y座標がともに0以上の整数になる点がいくつかとれるはずだよ。

太郎：4つとれますね。

先生：あとはその四点を結んだ各線分の長さの和と円周の関係を調べていけば証明終了だ。

花子：ということは, 円周が10πで, 今回求める部分はその4分の1だから…。

(4) 　　　部の4つの点の座標を求めなさい。

(5) 証明を完成させなさい。

（F先生）

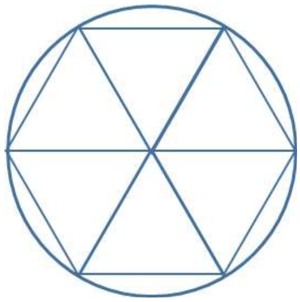
太郎さんと花子さんは円周率のことについて考えました。彼らの会話を読み, 下の問いに答えよ。

太郎：僕らが生まれたころの小学生は円周率を 3 で習っていたそうだよ。

花子：私たちは 3.14 で習ったね。

太郎：円周率を 3.14 として計算するより, 円周率を 3 として計算するほうが簡単だよね。どうして 3 のままにしなかったのかな？

花子：兄が円周率が 3 だと， 円に内接する正六角形の外周の長さと同じになるって言ってたよ。

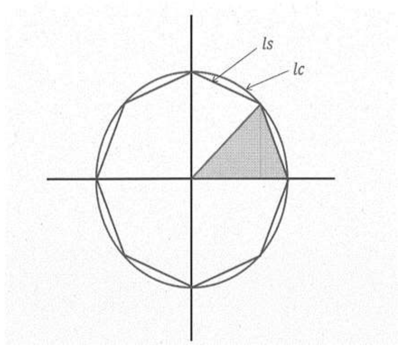


右の図は, 半径 r の円と円に内接する正六角形である。

太郎：円周率をπとすると, 円周の長さは $2\pi r$ で,
円に内接する正六角形の外周は $6r$

花子：だから, $\pi=3$ のとき, 円周の長さと円に内接する正六角形の外周の長さが同じになるんだね。

太郎：円に内接する他の正多角形についても考えてみよう。



右の図は, 半径 r の円に内接する正八角形である。

(1) 左の正八角形の一辺の長さを x とする。
次の（　ア　）に当てはまる値を求めなさい。

$x^2=(\text{ ア })r^2$

太郎：半径 r の円に内接する正八角形の一辺の長さを x とすると, 正八角形の外周の長さは $8\sqrt{(\text{ ア })}\,r$ になるね。

花子：半径 r の円の円周の長さは $2\pi r$ だから, $2\pi r>8\sqrt{(\text{ ア })}\,r$ が成り立つよ。

(2) （　イ　）,（　ウ　）,（　エ　）に当てはまる値を求め, 次の問いに答えよ。

不等式 $2\pi r>8\sqrt{(\text{ ア })}\,r$ の両辺を $2\pi r$ で割り, 2 乗すると,

$\pi^2>(\text{ イ })\{(\text{ ウ })-(\text{ エ })\}$

このとき, 不等式の向きが変わらない理由を, 解答欄（　あ　）に記述せよ。

太郎：$\sqrt{2}<1.4143$ だから, $\pi^2>(\text{ オ })\{(\text{ カ })-1.4143\}$
つまり, $\pi^2>(\text{ キ })$ であるといえるね。

花子：この平方数の表を使えば, πは（　ク　）より大きいことがわかるよ。

花子：六角形よりも角の個数が多い円に内接する多角形について考えれば, もっと正確な円周率の近似値をもとめることができるかもしれないね。

(3) （　オ　）,（　カ　）,（　キ　）に当てはまる値を求め, 次の問いに答えなさい。
また, 次の平方数の表を用いて,（　ク　）に当てはまる小数第二位の値のうち, 最大のものを答えよ。

x	3.01	3.02	3.03	3.04	3.05	3.06	3.07	3.08	3.09
x^2	9.0601	9.1204	9.1809	9.2416	9.3025	9.3636	9.4249	9.4864	9.5481