問題１

うっちーな は数学の宿題で以下の問題を解いています。次の解答では一部間違いがあります。

(問題)　４人でじゃんけんを１回するとき，あいこになる確率を求めよ。

＜うっちーな の解答＞

4 人の手の出し方は全体で 3^4 通り

4 人でじゃんけんをした時，あいこになるのは次の 2 パターンが考えられる。

(i) 全員同じ手を出す。　　(ii) グー・チョキ・パーすべて出る。

(i) のときは 3 通り

(ii)のときは 4 人のうち 3 人がグー・チョキ・パーを出し残った 1 人は 何を出してもよいので,

はじめの 3 人の手の出し方が 3! 通り　残りの 1 人の手の出し方が 3 通り

よって，3!×3 通りある。

(i)，(ii)より求める確率は $\dfrac{3}{3^4}+\dfrac{3!\times 3}{3^4}=\dfrac{7}{27}$

⑴ 間違いを指摘せよ。

⑵ ⑴の間違いを正しく直し， 正しい解答を導きなさい。

城ノ内中・高マスコットキャラクター
うっちーな

解答例）

⑴ はじめの 3 人の手の出し方が 3! 通り　残りの 1 人の手の出し方が 3 通り

よって，3!×3 通りある。　の部分が間違っている。

⑵ 4人でじゃんけんをしたとき, グー・チョキ・パーすべてが出る場合を考えれば, 4 人のうち必ず 2 人は同じ手となるので, 4 人のうち 2 人が同じ手を出す出し方は $\dfrac{4!}{2!}$ 通りある。

また, その 2 人がどの手で同じになるかは 3 通りある。

よって，$\dfrac{4!}{2!}\times 3=36$通り

(i), (ii)より求める確率は $\frac{3}{3^4}+\frac{36}{3^4}=\frac{13}{27}$

（問題の分析）

① 問題の意図

教科書の章末問題に 3 人の場合のじゃんけんの確率を求める問題があり, 授業で解いた。そのところ, 生徒が「これ 4 人とか 5 人とかだったらどうなるんだろう？」と言い出し, 着想を得た。また, 間違いを指摘するタイプの問題にした理由としては, 生徒の様子を観察していると, 間違いや違和感には気づくことはできるが根拠をもってその間違いを指摘できないことが多い。これらのことから上記の問題を出題した。

② 問題を解いてみての生徒の感想

- 何が間違ってるのか分からないから手を出せなかった。
- 間違っている部分は分かるけど, どう訂正すればよいか分からない。
- 普通に考えればできた問題なのに, 問題文の誘導にのって解いたら, 間違えてしまった。

③ 結果の考察

まず 4 人の内から 3 人を選ぶ必要があるので, ${}_4C_3$ 通り。 4 人のうち 3 人がグー・チョキ・パーを出し残った 1 人は 何を出してもよいので, はじめの 3 人の手の出し方が 3! 通り　残りの 1 人の手の出し方が 3 通り よって, ${}_4C_3\times 3!\times 3$ 通りある。

(1) はほとんどの生徒が正解していたが, (2) についてはこのような間違いが一番多く見受けられた。ある意味で問題文の誘導が効いていたようである。「問題文に足りないのは, 4 人のうちどの 3 人を選ぶかということであるから, ${}_4C_3$ をかければいいだけでしょ。」と考える生徒が多かったようである。しかし, それでは重複が出てしまうので,不適であるがそこまでを深く考察し, 解答できている生徒は少なかった。若干名樹形図ですべての場合を書き出し, 正答している生徒もいた。場合の数や確率で大事な「もれなく, ダブりなく」を学ぶ上での良問である。このようなミスリードの問題は生徒が苦手としているようであるため, 普段の指導に取り入れていくことも重要であると考えられる。

問題２

次の 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について, 内積と大きさがそれぞれ次のように与えられているとする。

このとき, 条件を満たすような $\vec{a}=(a,\ b,\ c)$, $\vec{b}=(x,\ y,\ z)$ を 2 組求めよ。

ただし, a, b, c, x, y, z はすべて実数とし, どのように見つけたか, 考え方を明示しなさい。

また, 下記の注意点に留意せよ。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-28$, $|\vec{a}|=\sqrt{14}$, $|\vec{b}|=2\sqrt{14}$

注意点）以下のように成分の順番を入れ替えたものは, この問題では同じものとみなす。

１組目　$\vec{a}=(a\,,b\,,c)$　, $\vec{b}=(x\,,y\,,z)$

２組目　$\vec{a}=(b\,,c\,,a)$　, $\vec{b}=(y\,,z\,,x)$

解）　$\vec{a}$と$\vec{b}$がなす角をθとする。

このとき，与えられた条件より

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$=\frac{-28}{\sqrt{14}\cdot 2\sqrt{14}}$$

$$=-1$$

よって，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ がなす角は $180°$ である。

このとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一直線上にあり，逆向きかつ $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$ より，

$\vec{b}=(-2a,\ -2b,\ -2c)$ と表すことができる。

ここで，$|\vec{a}|^2=14$ であることから，

$a^2+b^2+c^2=14$

この方程式をみたす解の組は

$(a^2,\ b^2,\ c^2)=(1,\ 4,\ 9)$，$(2,\ 5,\ 7)$ 等が考えられる。

よって，　$(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ 3)$，$(\sqrt{2},\ \sqrt{5},\ \sqrt{7})$

このとき，$(x,\ y,\ z)=(-2,\ -4,\ -6)$，$(-2\sqrt{2},\ -2\sqrt{5},\ -2\sqrt{7})$

（問題の分析）

①問題の意図

教科書や傍用の問題集では次のような問題が一般的である。

（問題）

2つのベクトル $\vec{a}=(1,\ -1,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ \sqrt{6},\ -1)$ について，内積と大きさを求めよ。
また，2つのベクトルがなす角 θ を求めよ。

この問題から着想を得た。教科書や普段の指導では教科書的な与えられた条件の下で問題を解くという訓練しかしていない生徒が多く，上記の問題のように逆説的な問題に触れる機会がほとんどない。そのため，思考力を問うためには最適だと考え出題した。

②問題を解いてみての生徒の感想

多くの生徒が「普通の問題は解けるが，成分計算をしても全然解が出てこなかったので諦めた。」という感想をもったようである。その誤答例としての最たるものが次のような解答である。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=ax+by+cz=-28$

$|\vec{a}|^2=a^2+b^2+c^2=14$

$|\vec{b}|^2=x^2+y^2+z^2=56$

この3式を連立すると……　難しくて解けない!!

③ 結果の考察

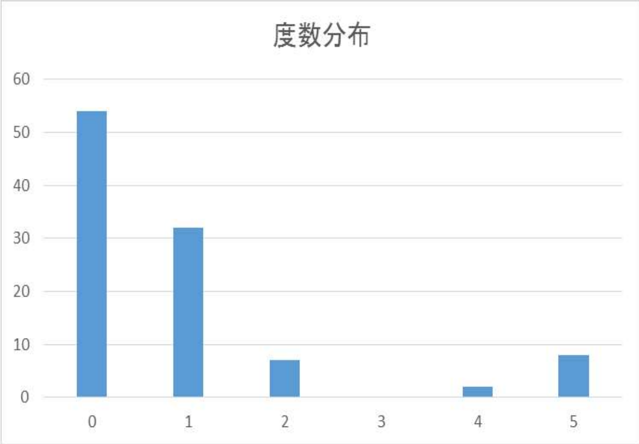
　結果は右図のようになった。

　縦軸が人数, 横軸が得点である。

　解答を確認したところ多くの生徒が無回答もしくは先述の間違いをしていた。

　また, 0 点のうち無回答のものが 42% であり, 23 人もの生徒が無回答であった。

無回答の生徒の一部に聞き取りをしてみると,「分からなかったので, 他の問題で点を稼いだ方が賢い」との返答も多く見受けられた。



　このような考え方は受験のテクニックとしてはある意味正解なのかもしれないが, 普段から, 先述のような考えをもって取り組んでいる生徒がいるということが共通テストを受験する上では, 一番怖いことである。このような考えをもつ生徒のチャレンジ精神を揺さぶるような作問や授業改善をしていく必要が感じられる。

問題３

　太郎さんは教科書の例題の問題を見て何を書いているのかさっぱり分からず花子さんに相談してみることにした。

太郎：教科書の例題にこんな問題があるんだけど, 解答の意味がわからないんだ。

例題　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)$ の極限を求めよ。

解答　$x=-t$ とおくと, $x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ であるから

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t^2-t}-t\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\sqrt{t^2-t}-t\right)\left(\sqrt{t^2-t}+t\right)}{\sqrt{t^2-t}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{\sqrt{t^2-t}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{t}}+1}=-\frac{1}{2}$$

花子：これのどこが分からないの？私はなんとも思わないけど…

太郎：だって, 数列の極限もそうだったけど, ここまでの問題は分子を有理化して極限値を求めるだけだったのに, この問題はなぜかいきなり文字を置き換えてるよね。これって解き方を覚えるしかないの？今までもいっぱい解き方を覚えてきたからもう飽き飽きなんだ。

花子：太郎さんの気持ちは良く分かるわ。じゃあ, 一緒に考えてみようよ。太郎さんの疑問はすごくいいところを突いていると思うの。これまでと同じように逆有理化したらどうなるかな？

太郎：えーっと…。

$$\sqrt{x^2+x}+x=\frac{(\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+x}-x)}{\sqrt{x^2+x}-x}$$
$$=\frac{(x^2+x)-x^2}{\sqrt{x^2+x}-x}$$
$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}$$

これで合ってるかな？

花子：That's right!! 先生がこういうときは，分母・分子を x でわるって言ってたよね。

太郎：そうそう。だから，

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}$$
$$\to \quad \frac{1}{1-1}=\frac{1}{0} \ ？$$

教科書の答えは $-\frac{1}{2}$ なのに…

花子：太郎さん，今ものすごく良いことを言ってるわよ。

太郎：へ……？何が？

花子：教科書の答えが間違ってるなんてそうそうないわよね。ということは太郎さんの解答がどこか間違ってるってことだよね。いったいどこが間違ってるんだろう？

太郎：ん～。まぁ，答えだけ合わせるなら $\sqrt{\ }$ の前に $-$ がついてくれたら合いそうだけど…

花子：太郎さん，あなたセンス抜群ね!!まさにそうよね。きっと，$\sqrt{\ }$ の前に $-$ がつくのよね。ということは変形の最中にどこかでミスをしてるってことよね。

太郎：何も間違えてない気がするんだけど，そう言われれば確かにそうな気もするなぁ。

問）上述の会話文を参考にして次の問いに答えよ。

（1）太郎さんのミスを指摘し，正しい解答を記述しなさい。

解答）この問題では，$x\to-\infty$ と考えているため，$x<0$ として考える必要がある。

そのため，

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1} \quad \to \quad \frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}$$ ではなく，

正しくは，

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}=\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1} \quad \to \quad \frac{1}{-1-1}=-\frac{1}{2}$$ である。

（2）教科書の例題がなぜ文字を置換する方法をとっているか考察しなさい。

解答）置換しない場合，上記のように $x<0$ であることから，$\sqrt{x^2}=-x$ と変形する必要がある。

この変形は，高校生が苦手とする部分であり，置換することによって t を正の数として考えられ，$-$を付けて $\sqrt{\ }$ をはずす操作を解消できるためと考えられる。

（問題の分析）

① 問題の意図

この問題を作成しようと思ったきっかけは，教材研究時になぜこのような置換をしているのか疑問に感じたためである。では，どうして置換するのかと議論しているときに「置換することによって，生徒が苦手とする $\sqrt{\ }$ の中身が負の場合に $-$ をつけてはずすことを避けることができる」などの理由が挙げられた。確かに教科書には別解は示されておらず，自分で予習する際には気づきにくいであろう。そのため，授業においてはその考え方を紹介し，生徒が咀嚼するための時間を設けることで思考力が深まるのではないかと考えた。さらに判断力や表現力を同時に高めるためには，共通テストで取り入れられている会話文形式の問題を作成し，文章から必要な情報を読み取り，自分の考えを文字に書き起こして表現することが最適である。また，文中の誘導を丁寧にすることで正答率がどのようになるのかを調査したいという考えの下，本題を出題した。また,今回の問題では正答率が 50% 前後になることを想定して作問した。

② 問題を解いてみての生徒の感想

（否定的な意見）　・難しい。何を書いたらいいのか分からない。計算練習をしたほうが勉強になる。

（肯定的な意見）　・教科書には書いていない解法がわかって楽しい。いろんなことを吟味した上で教科書ができていることがよく分かる。暗記型ではない数学の本質的な部分が見えておもしろかった。

③ 結果の考察

下記の表に結果を掲載する。上位や下位については模試の成績と校内実力テストの結果を平均し，順番に並び替えて決定している。

	正解	部分点	不正解	無回答
上位層	45%	25%	15%	15%
中位層	45%	15%	25%	15%
下位層	33%	17%	28%	22%

この結果から，上位と中位に優位な差は見られないことが分かる。先のベクトルの問題のように誘導をつけない問題よりも無回答率が下がり，正答が多くなっていることがわかる。

上位層と中位層の部分点と不正解の部分の違いに焦点を当てると,上位層の解答のうち，部分点を与えているものについて，方針はわかって日本語で記しているが数式化することができていないものがほとんどである。

また，下位層で多く見受けられた誤答を以下に記す。

(1) x が正だと思っているから，一般性を失っていない。

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}$$

$x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき，$t\to\infty$ だから

$$\frac{-t}{\sqrt{t^2-t}+t}=\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{t}}+1}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

このように, 不正解となっている生徒の解答を見てみると何をしてよいか分からず, 文章の本意を正確に読み解くことができていない解答が多く見受けられた。また, 次の解答のように何を主張しているのかが書いている本人も分からなくなっているケースもある。そのまま引用する。

> (1) 太郎さんに対するアドバイス。
> $-\infty$ は負の方向に ∞ へとばしているが, 太郎さんは分母・分子を最高次係数で割って, ∞へととばしている。 $-\infty$ へとばすには計算上大変ややこしいので, あらかじめ最高次係数を x ではなく, $-x$ で割ることで ∞ へとばしても, $-\infty$ へとばしたことになる。よって, 文字をおきかえて $-t$ で分母・分子を割ったあと ∞ へととばすべきだった。

解答者本人に直接どういう意味か尋ねてみると,「書いてる途中で訳が分からなくなり変な文章になった。」とのことであった。これはまさしく大学共通テストが真に測ろうとしている「文章を正確に読み取り, 論理的に記述する力」が定着していない例であると考えられる。

問題４

AさんとBさんが実数の整数部分と小数部分の授業のあと，次のような会話をした。この会話文を読んで以下の問いに答えよ。

A：『実数 x に対して， x を超えない最大の整数を x の整数部分という』ってことだったよね？
今日やった　『$2+\sqrt{3}$ の整数部分は？』　なんて問題，$\sqrt{3}$ は（ひとなみにおごれや…）とかで，
$\sqrt{3}=1.732\cdots$ なんだから，$2+\sqrt{3}=3.732\cdots$ でしょ？だから，整数部分は3ってすぐわかるよね？
先生，なんかめんどくさい説明してなかった？

B：でも，先生も授業中に言ってくれてたように，$\sqrt{3}$ のように近似値がわかっているものはすぐ答えがわかるけど，そうじゃない問題もあるんだよ。例えば，$\sqrt{43}$ っていくら？

A：知らない。。。

B：だよね？だから，『$\sqrt{43}-3$ の整数部分を求めよ。』みたいな問題が出たとき，きちんとした評価をして答えを出していかないといけないんだよ。

A：どういうこと？

B：まず，①$\boxed{36}<43<$ ②$\boxed{49}$ だから，$6<\sqrt{43}<7$ だね。
求めたいのは $\sqrt{43}-3$ の整数部分だから，
③$\boxed{3}<\sqrt{43}-3<$ ④$\boxed{4}$ となって。$\sqrt{43}-3$ の整数部分は3ってわかるわけよ。

A：なるほど。まず⑤$\boxed{}$ といいってことだね！

B：そういうこと！じゃあ，調子に乗って，もう１問！
$2\sqrt{11}$ の整数部分は？

A：もう大丈夫だよ。えっと，まず，$9<11<16$ だから，$3<\sqrt{11}<4$　となる。
これより $6<2\sqrt{11}<8$ となるから…。あれ？整数部分は 6 か 7 となって，うまく求まらないよ。

B：⑥$\boxed{}$

A：なるほど！近似値を知らなくても，整数部分は求められるんだね！！
よくわかったよ。ありがとう！

(1) 会話文中の①～④に当てはまる数をそれぞれ書き入れよ。

(2) 会話文中の⑤に適当な言葉を入れよ。解答は下の解答欄に書け。

例　$\sqrt{\ }$ の中身を連続する平方数で挟む

(3) 会話文中の⑥の部分には，$2\sqrt{11}$ の整数部分を求めるBさんの説明が入る。Aさんにうまく伝わるように注意して，下の解答欄に書け。

例 $2\sqrt{11}=\sqrt{44}$ と変形するんだよ。 すると，$36<44<49$ だから，$6<\sqrt{44}<7$ となる。 つまり，$6<2\sqrt{11}<7$ となるから，$2\sqrt{11}$ の整数部分は 6 となるんだ。

問題５

1次不等式　$\dfrac{2x+\sqrt{3}}{6}\geqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{2}{3}$　を次のように解いた。

【例】にならって，どういった変形を行ったか説明せよ。また，この解について合っているかどうかを検討せよ。そして，もし間違っているのなら，どの部分での変形が間違えているのか指摘し，正しく訂正せよ。

$$\frac{2x+\sqrt{3}}{6}\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{2}{3}$$

【例】両辺を6倍する

$$2x+\sqrt{3}\geqq3\sqrt{3}\,x+4$$

1　移項する

$$(2-3\sqrt{3})x\geqq4-\sqrt{3}$$

2　両辺を $2-3\sqrt{3}$ で割る

$$x\geqq\frac{4-\sqrt{3}}{2-3\sqrt{3}}$$

3　右辺の分母を有理化する

$$x\geqq\frac{1-10\sqrt{3}}{23}\quad\cdots\text{答}$$

この不等式の解 $x\geqq\dfrac{1-10\sqrt{3}}{23}$ について

（　合っている　・　間違っている　）

間違っている場合，間違っている部分（　1　・　2　・　3　）
（訂正した解答）

$2-3\sqrt{3}<0$ であるので，
$(2-3\sqrt{3})x \geqq 4-\sqrt{3}$ の両辺を $2-3\sqrt{3}$ で割ると
$x \leqq \dfrac{4-\sqrt{3}}{2-3\sqrt{3}}$

問題６

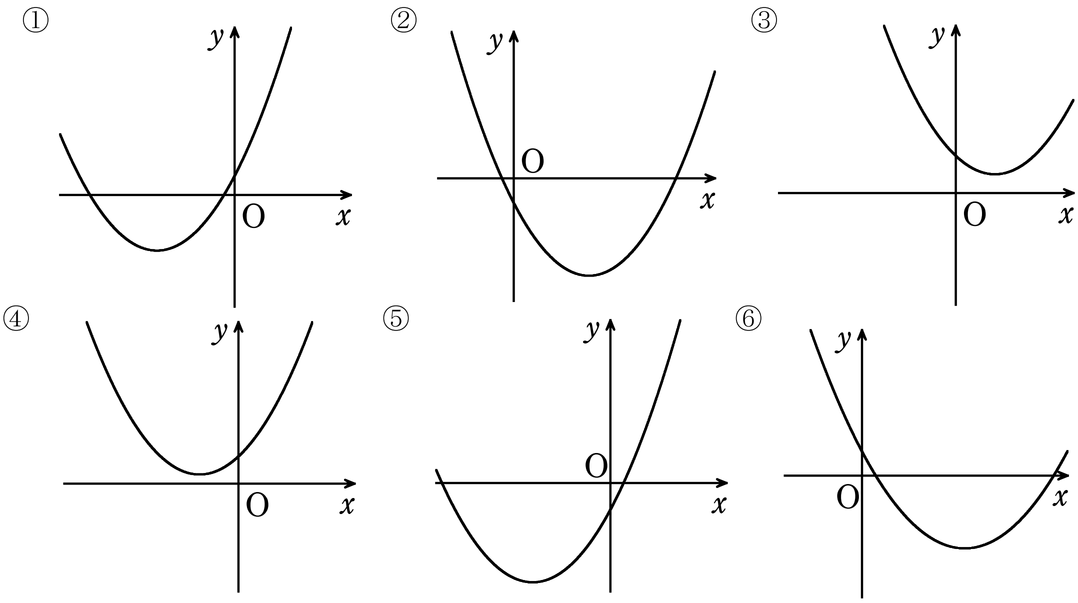
下に凸の放物線 $y=f(x)$ が，x 軸の負の部分と，異なる２点で交わるような条件を考えたい。以下の問いに答えよ。(1), (2) は答のみでよい。

(1)　２次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D，放物線 $y=f(x)$ の軸の方程式を $x=p$ とする。
□ に不等号を書き込み，満たすべき3つの条件を完成させよ。

（ⅰ）$D\ \boxed{>}\ 0$　　（ⅱ）$p\ \boxed{<}\ 0$　　（ⅲ）$f(0)\ \boxed{>}\ 0$

(2)　(1) で表した３つの条件のうち，次のような $y=f(x)$ のグラフを ①～⑥ からすべて選び，番号を記入せよ。

（ⅰ), (ⅱ) は満たすが (ⅲ) は満たさないグラフ …　〔　⑤　〕
（ⅰ), (ⅲ) は満たすが (ⅱ) は満たさないグラフ …　〔　⑥　〕



(3)　$f(x)=x^2+2ax-a+6$ とする。$y=f(x)$ のグラフが，x 軸の負の部分と，異なる２点で交わるような，定数 a の値の範囲を求めよ。

（ⅰ）$D/4=a^2-(-a+6)=(a+3)(a-2)$　　$D>0$ より　$a<-3$，$2<a$　…①

（ⅱ）$f(x)=(x+a)^2-a^2-a+6$ と変形できるから，放物線 $y=f(x)$ の軸の方程式は

$x=-a$　よって，$-a<0$　より　$a>0$　…②

（ⅲ）$f(0)=-a+6$　$f(0)>0$より　$-a+6>0$　$\therefore a<6$　…③

①,②,③ の共通範囲を求めて　$2<a<6$　……答

問題７

［ア］　一歩で１段 または２段 (１段飛ばし) 上るとき，10段の階段を上る方法について，以下の対話を穴埋めできるよう，解答欄に適切な数値や記号を書き込みなさい。

ただし，解答に関しては以下の注意事項をよく読んで記入すること。

注意　(2)(4)(6)(7)(11)は数値を書く。　(3)(10)はどちらか一つを選択し○印で囲む。

(8)(9)は$f(1)$～$f(9)$ のうち適切なものを記入。　(1)(5)は丁寧に記述すること。

先生：まず，ルールの確認をします。例えば3段上るときは，「2段，1段」と上るか，「1段，2段」と上るか，

「1段，1段，1段」と上るか，３通りの方法があります。

これを，シンプルに (2,1)，(1,2)，(1,1,1) と書きますよ。

４段上るときはどのような方法がありますか？同じように書き出してみましょう。

生徒：はい。全部書き出すと $\boxed{(1)}$ です。

だから全部で $\boxed{(2)}$ 通りの上り方があります。

先生：その通り。では10段上るときはどうでしょう？

生徒：うーん…とてもたくさんの方法があって，書き出すのは厳しいです…

先生：それじゃあ，発想を変えて考えてみましょう。

５段のとき，６段のとき，７段のとき…という風に順に上り方の総数を数えていく方法です。

５段を上るとき，最初の一歩は1段か2段のどちらかですね。

最初の一歩が１段のときは，残りは4段上るのだから全部で $\boxed{(2)}$ 通りの上り方があり，

最初の一歩が２段のときは，残りは3段上るのだから全部で３通りの上り方があります。

よって $\boxed{(3)}$ より，５段を上る方法は $\boxed{(4)}$ 通りですね。

生徒：なるほど！この考え方を繰り返していけば10段上る方法も数えれますね。

先生：説明を簡単にするために，n 段上る方法の総数を $f(n)$ で表すようにして解答を書いて下さい。

つまり，３段上る方法が３通りだから $f(3)=3$ 。

４段上る方法が $\boxed{(2)}$ 通りだから，$f(4)=\boxed{(2)}$。

５段上る方法が $\boxed{(4)}$ 通りだから，$f(5)=\boxed{(4)}$。

記号の使い方はわかりましたか？

生徒：はい。理解しました。この $f(n)$ という記号を使って $f(10)$ を求めてみます。

$\boxed{(5)}$ です。どうでしょうか？

先生：よくできました！

先生：じゃあ，次は途中で６段目を踏まないで10段上る方法を数えてみましょう。

６段目を踏まないで10段上るとき，途中で必ず踏むのは何段目ですか？

生徒：えーと，6 段目を踏まないのだから，$\boxed{(6)}$ 段目と $\boxed{(7)}$ 段目です。

先生：そうですね。だから，$\boxed{(6)}$ 段目までの上り方が $\boxed{(8)}$ 通りあり，

$\boxed{(7)}$ 段目から10段目までの上り方が $\boxed{(9)}$ 通りあるので…

生徒：$\boxed{(10)}$ より，答えは $\boxed{(11)}$ 通りですね。

先生：素晴らしい！よくできました。今回の様な発想をしっかりと覚えておいて下さい。

(1)	(1,1,1,1)　(2,1,1)　(1,2,1)　(1,1,2)　(2,2)

(2)	5 （通り）	(3)	和の法則　積の法則	(4)	8 （通り）

(5)	6 段上る方法が 13 通りだから，$f(6)=13$。 n 段を上るとき，最初の一歩は1 段か2 段のどちらかであり， 最初の一歩が 1 段のときは，残りは $n-1$ 段上るのだから全部で $f(n-1)$ 通り 最初の一歩が 2 段のときは，残りは $n-2$ 段上るのだから全部で $f(n-2)$ 通り の上り方がある。 よって 和の法則より，n 段を上る方法は $f(n-1)+f(n-2)$ 通りである。 つまり，$f(n)=f(n-1)+f(n-2)$ という関係が成り立つ。 よって， $f(6)=f(5)+f(4)=8+5=13$ 通り $f(7)=f(6)+f(5)=13+8=21$ 通り $f(8)=f(7)+f(6)=34$ 通り $f(9)=f(8)+f(7)=55$ 通り $f(10)=f(9)+f(8)=55+34=89$ 通り

(6)	5 （段目）	(7)	7 （段目）	(8)	8 （通り）	(9)	3 （通り）

(10)	和の法則　積の法則	(11)	24 （通り）

問題８

太郎君と花子さんが次のような問題について話し合っている。会話文を読んで問いに答えよ。

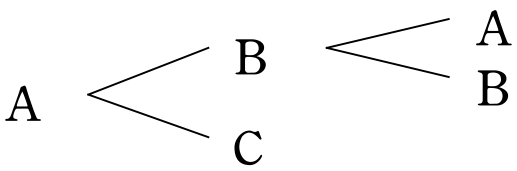
問題

次の硬貨の全部または一部を使って, ちょうど支払うことのできる金額は何通りあるか求めよ。

10 円硬貨 4 枚, 50 円硬貨 1 枚 , 100 円硬貨 3 枚

太郎：えーと。こういう問題は硬貨の組み合わせを考えたらいいんですよね。

だから, 10円を A , 50 円を B , 100 円を C とおいて樹形図を書いてっと…。



花子：ちょっと, 太郎くん！！こんなの樹形図で書いてたら日が暮れるわよ。もうちょっと賢く考えてみて！

それぞれの硬貨の使い方を考えたらどう？

太郎：は, はい。

10 円硬貨は 0 , 1 , 2 , 3 , 4 枚の 5 通りの使い方があります。

花子：いい調子！

太郎：同じように,

50 円硬貨は 0 , 1 枚の 2 通りの使い方があります。

100 円硬貨は 0 , 1 , 2 , 3 枚の 4 通りの使い方があります。

花子：それで？

太郎：そうか！だから, 全部で 5+2+4＝11 通りあります！

花子：もー！

先生：まぁまぁ, 2 人とも落ち着いて。太郎君も よぉ考えてみ～よ。

もし, 11 通りぐらいなら樹形図書いても日は暮れんよな。

ということはどこかが間違っているってことよな？

みんなは分かるかな？

問）会話文を読んで, 太郎君の間違いの理由を日本語で指摘し, その後正しい解答記述せよ。

例：太郎君は各硬貨の組み合わせを考えることができていない。

上記の会話の内容のような和の法則を使った考えをしてしまうと,

10 円硬貨のみ使ったとき, 50 円硬貨のみ使ったとき,

100 円硬貨のみ使った場合を考えることになっている。

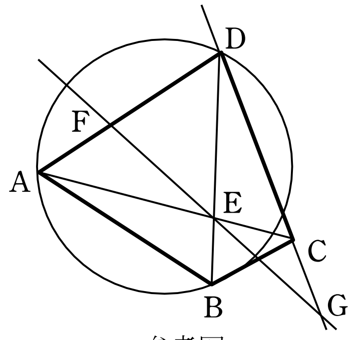
今回の問題では 3 種類の硬貨の全部または一部を使った時に支払うことのできる金額が何通りであるか求める問題であるため, それぞれの硬貨を何枚ずつ使うかの組み合わせを考えなければならない。したがって, 和の法則ではなく, 積の法則を用いると,

$$5\cdot 2\cdot 4=40$$

このとき, 各硬貨を 1 枚も使わない場合を含んで考えているため1 通りを除くと, 40－1＝39 通り

問題９

四角形 ABCD において，AB＝4，BC＝2，DA＝DC であり，4 つの頂点 A，B，C，D は同一円周上にある。対角線 AC と対角線 BD の交点を E，線分 AD を 2：3 の比に内分する点を F，直線 FE と直線 DC の交点を G とする。

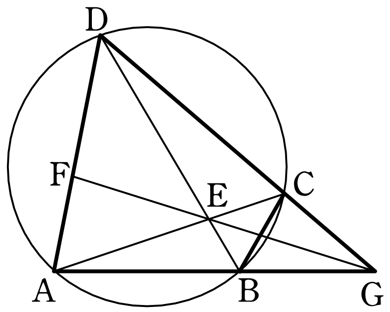


参考図

問題
直線 AB が点 G を通る場合について考える。
線分BGの長さと線分CDの長さをそれぞれ求めよ。

問題について太郎さんと花子さんは, 次のように会話している。

太郎：直線ABが点Gを通る場合を図示すると下の図のようになるね。
どうやって求めたらいいんだろう？方針が全然わからないよ。



花子：授業で先生が円の外側に点があるときは,（　A　）を使う問題が多いって言ってたわ。今回の問題だったら,
点Gが円の外側にあるから,（　A　）より
GB・GA＝GC・GD
が成り立つわよね。ということは,
GB・(GB＋AB) ＝GC・(GC＋CD)　…①
と変形できるから, 長さが分からない線分を３つも使ってるわね。
きっと,（　A　）を使うことを考えるよりも前に他の条件が必要そうね。

太郎：なるほどね。よく眺めてみると, △ADGって各線分を内分する点B, C, Fが存在
するから, チェバの定理が使えそうな気がするんだ。つまり,
$\dfrac{AB}{BG}\cdot\dfrac{GC}{CD}\cdot\dfrac{DF}{FA}=1$　…②　が成り立つことを利用できそうだよね。

花子：確かにそうね。$\dfrac{DF}{FA}=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$　ってことは分かってるけど…
これもこれで $\dfrac{AB}{BG}$, $\dfrac{GC}{CD}$ の値は分からないよね。

太郎：そうなんだけど, $\dfrac{AB}{BG}$ と $\dfrac{GC}{CD}$ のどちらかの値が求まれば②のことからもう一方の値は求まるんじゃない？
とりあえず, $\dfrac{GC}{CD}$ の値を求めてみようよ。

そこで, $\dfrac{GC}{CD}$ を求めるために, 円に内接する図形の性質を用いて角の大きさや辺の比に注目して考えることにした。

次の $\boxed{ウ}$ に当てはまるものを，下の ⓪～④ のうちから当てはまるものをすべて選べ。

DA＝DC であることに注意すると，∠DAC と大きさが等しい角は，$\boxed{ウ}$ である。

⓪ ∠ABD　① ∠ACB　② ∠DCA

③ ∠DEA　④ ∠DBC

このことより $\dfrac{EC}{AE}=\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ である。

次に，△ACD と直線 FE に着目すると，メネラウスの定理より，

$\dfrac{GC}{DG}=\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ である。

よって，$\dfrac{GC}{CD}=\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である。

また, チェバの定理より $\dfrac{AB}{BG}=\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ である。

AB＝ 4 であることから,

BG＝ $\boxed{シ}$ であることが分かる。

さらに, CD＝ $\boxed{ス}$ GC であることと, ①より

CD＝ $\boxed{セ}$ $\boxed{ソ}$ である。

（A）に適する定理名を下の選択肢から選びなさい。

① 接弦定理　② チェバの定理　③ メネラウスの定理

④ 方べきの定理　⑤ トレミーの定理　⑥ 三平方の定理

⑦ 円周角の定理

$\boxed{④}$

ア	3	イ	2	ウ	⓪, ③, ④
エ	1	オ	2	カ	1
キ	3	ク	1	ケ	2
コ	4	サ	3	シ	3
ス	2	セ	2	ソ	7

問題１０

数夫さんと学さんが，【問題】の解法について話をしています。会話文を読み，下の問に答えなさい。

【問題】『整式A$=x^3+ax^2-5x+4$ を 整式B$=x^2+bx-2$ で割ると，
余りが 2 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。』

数夫：① 実際に割り算をすれば、解けそうだね。

学　：でも，商に x をたてて引き算すると x^2 の係数に a と b が含まれるよ。

数夫：係数が文字や式であっても，商に立てていいんだよ。数の場合と同じように計算を進めれば大丈夫さ。

学　：そうなんだ。 a や b を含む余りの式が2となるように方程式を作れば解けるね。この方法でやってみようかな。僕は，別の方法を考えていたんだ。

整式Aを整式Bで割ったときの商をQ余りをRとすると $\boxed{（ア）}$ と表されるよね。

この問題では３次式を２次式で割っているから商は 定数 c, d を使って $\boxed{（イ）}$ と表せる。

これと，上の整式A，B，余りの２を（ア）の形にすると，② x についての恒等式になるよね。

後は，右辺を展開して・・・という方法で解けると思ったんだ。

数夫：なるほど，この方法でもできそうだ。

僕は学君の方法でやってみよう。

⑴　（ア）（イ）にあてはまる式を書きなさい

（ア） $\boxed{A=BQ+R}$ （イ） $\boxed{cx+d}$

⑵　下波線部①，②どちらの方法で解いたか［　］に記入し，問題を解きなさい。

方法【　①　】

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+a-b \\
\hline
x^2+bx-2 & x^3+ax^2-5x+4 \\
 & x^3+bx^2-2x \\
\cline{2-2}
 & (a-b)x^2-3x+4 \\
 & (a-b)x^2+(ab-b^2)x-2a+2b \\
\cline{2-2}
 & \qquad (-3-ab+b^2)x+4+2a-2b
\end{array}
$$

余りは２であるから，$(-3-ab+b^2)x+4+2a-2b=2$

これは，x についての恒等式であるから，$-3-ab+b^2=0$ ，$4+2a-2b=2$

この連立を解くと，$a=2$, $b=3$ である。

方法【　②　】

商を $cx+d$ としたとき，　$x^3+ax^2-5x+4=(x^2+bx-2)(cx+d)+2$ が成り立つ。

右辺を展開すると，　　$x^3+ax^2-5x+4=cx^3+(bc+d)x^2+(bd-2c)x-2d+2$

この式は，x についての恒等式であるので，

$c=1$, $a=bc+d$, $-5=bd-2c$, $4=-2d+2$

これを解くと，

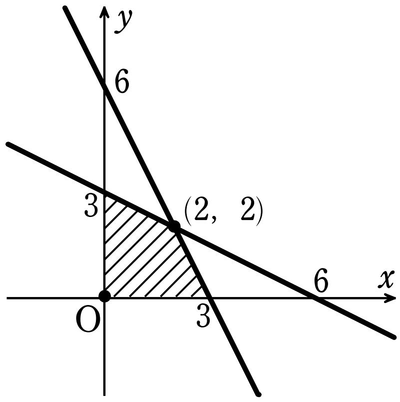
$a=2$, $b=3$ である。

問題１１

AさんとBさんが次の問題を解こうとしている。二人の会話文を読んで以下の問いに答えなさい。

［問題］

x，y が4つの不等式 $2x+y\leqq 6$，$x+2y\leqq 6$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ を満たすとき，$2x+3y$ の最大値を求めよ。



A：まずは連立不等式の表す領域を図示しようか。

B：2直線 $2x+y=6$，$x+2y=6$ の交点の座標は(2，2)
だから与えられた4つの不等式を満たす点 $(x,\ y)$ の
存在する領域は右図の斜線部分になるね。ただし，
境界線を含むよ。

A：　$2x+3y=k$　……①　とおくと，
①は傾きが $-\dfrac{2}{3}$，　y 切片が $\dfrac{k}{3}$ の直線を表すから…。

B：ねえ。この手の問題はたいてい一番出っ張ったところを通るときが答えだよね。
点(2，2)を通るとき k の値は最大でいいんじゃない？

A：そんな単純なものではないでしょう。
この問題はたまたま点(2，2)を通るとき がk の値は最大になるけれど，例えば
直線①の傾きが $\boxed{\text{ア}}$ のときは点(0 , 3) を通るときに k の値は最大になるし，
直線①の傾きが $\boxed{\text{イ}}$ のときは点(3 , 0) を通るときに k の値は最大になるよ。

B：そうか。やっぱりきちんと図を見て判断しないといけないんだね。

(1)　会話文中の空欄ア，イにあてはまる数を答えよ。（解のみでよい）

ア	1	イ	-3

（アは $-\dfrac{1}{2}$ よりも大きい数, イは -2 よりも小さい数が書けていればOK）

(2)　この問題を変えて，$2x+3y$ の最大値ではなく，$mx+y$ の最大値を求めることにする。
直線 $mx+y=k$ が点(2，2)を通るとき k の値が最大となるような定数 m の値の範囲を求めなさい。

解）点(2 , 2) を通るとき, k つまり, 上記の図より y 切片の値が最大となるのは,
求める直線が2 直線の間にあるような時である。
すなわち, 傾き $-m$ について, $-2\leqq -m\leqq -\dfrac{1}{2}$ が成り立てばよいので

求める定数 m の値の範囲は, $\dfrac{1}{2}\leqq m\leqq 2$ である。

問題１２

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とするとき。7^{20} は何桁の整数かという問題を考えている A くんと N 先生の会話である。 $\boxed{}$ に当てはまる数字を解答欄に記入し，解答欄(あ)に入るものとして適当なものをすべて選びなさい。(10点)

A： $\log_{10}7$ の値が与えられていないからこの問題は解けません。

N： $\log_{10}7$ を近似してみてはどうでしょう？

A： $6<7<8$ から考えてみると

$\log_{10}6=\log_{10}\boxed{ア}+\log_{10}\boxed{イ}=\boxed{ウ}$,

$\log_{10}8=\boxed{エ}\log_{10}2=0.9030$ から

$\log_{10}6<\log_{10}7<\log_{10}8$ と $\log_{10}7^{20}=20\log_{10}7$ から

$20\times\boxed{ウ}<20\log_{10}7<20\times0.9030$

$\boxed{オ}<20\log_{10}7<18.060$

あれ？これでは $\boxed{\text{解答欄(あ)}}$ となる可能性が出てきてしまってやはり解けません。

N： もう少し範囲を狭くする工夫をしてみましょう。

$2\log_{10}7$ の近似で考えてみてはどうですか？

A： $\boxed{カ}<\boxed{キ}<\boxed{ク}$ で考えてみるということですね。

$\log_{10}48=\log_{10}2^4\cdot3=4\log_{10}2+\log_{10}3=1.6811$

$\log_{10}50=\boxed{ケ}$

よって　$1.6811<2\log_{10}7<\boxed{ケ}$　　$16.811<20\log_{10}7<\boxed{コ}$

これで 7^{20} は $\boxed{サ}$ 桁と分かります。

N：大正解です。ちなみに $\log_{10}7=0.8451$ です。

(1)　解答欄

(ア)	2	(イ)	3	(ウ)	0.7781	(エ)	3
(オ)	15.562	(カ)	48	(キ)	49	(ク)	50
(ケ)	1.6990	(コ)	16.990	(サ)	17		

(2)　解答欄(あ) に入るものとして適当なものを下の中からすべて選びなさい。

①１５桁　②１６桁　③１７桁　④１８桁　⑤１９桁

(2)　解答）②, ③, ④, ⑤

問題１３

ＡさんとＢさんが次のような問題を解こうとしている。二人の会話文を読んで以下の問いに答えなさい。

［問題］

次の数の大小を不等号を用いて表せ。

$\log_4 9$，$\log_9 25$，1.5

Ａ：大小関係を比較するときは，まず底をそろえてから真数を比較すればよいと授業では教わったけれど…

Ｂ：この問題では $\log_9 25$ の底を 4 に変換して整理しても $\boxed{（ア）}$ となるだけで比較できる形にはならないね。

Ａ：えー。どうしたらいいんだろう。

Ｂ：問題をよく見てみましょう。$\log_4 9$ と $\log_9 25$ を直接比較するのは難しそうだけど，1.5 という数は底がどんな数の対数でも変形できそうよ。

Ａ：そうか！

$1.5=\log_4\boxed{（イ）}$ と変形できるし，$1.5=\log_9\boxed{（ウ）}$ ともできるね。

Ｂ：その通り。1.5 という数を間にはさむことで底をそろえても大小関係が比較しにくい場合でも大小が確認できるね。

⑴　会話文中の空欄(ア)にあてはまる式と，(イ)，(ウ)にあてはまる簡潔にした数値を答えよ。（解のみでよい）　（各 2 点×３）

ア	$\dfrac{\log_4 5}{\log_4 3}$	イ	8	ウ	27

⑵　二人の会話文を参考にして，次の問題を解け。（ 4 点 ）

［問題］

底と真数の差が 1 である次の２つ数の大小を不等号を用いて表せ。

$\log_2 3$，$\log_3 4$

$1.5=\log_2 2^{1.5}=\log_2 2\sqrt{2}$

$1.5=\log_3 3^{1.5}=\log_3 3\sqrt{3}$

$2\sqrt{2}<3$ で，底 2 は 1 より大きいから

$\log_2 2\sqrt{2}<\log_2 3$

すなわち　$1.5 < \log_2 3$…①

また，$4 < 3\sqrt{3}$ で，底 3 は 1 より大きいから

$\log_3 4 < \log_3 3\sqrt{3}$

すなわち　$\log_3 4 < 1.5$…②

①②より　$\log_3 4 < 1.5 < \log_2 3$ であるから

$\log_3 4 < \log_2 3$

問題１４

次の 4 つの数すべてを使い，四則演算をして答えが $\sqrt{a}$ になるような式を２種類作りなさい。

$\sqrt[4]{a^3}$　　$\sqrt{a}$　　$\sqrt[6]{a^5}$　　$\sqrt[12]{a}$

解)　それぞれを，指数の形に変形し，指数部分の分母を12にそろえると

$\sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{9}{12}}$

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{6}{12}}$

$\sqrt[6]{a^5} = a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{10}{12}}$

$\sqrt[12]{a} = a^{\frac{1}{12}}$

ここで，指数部分に注目すると，

答えが $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{6}{12}}$ になるようにするためには

次の式において，○ 部分に何が入るかを考えればよい。

○ 9 ○ 6 ○ 10 ○ 1 ＝6

次のような組み合わせが考えられる。

① $-9+6+10-1=6$

② $9+6-10+1=6$

よって，求める式は

① $\sqrt{a} \div \sqrt[4]{a^3} \times \sqrt[6]{a^5} \div \sqrt[12]{a}$

② $\sqrt[4]{a^3} \times \sqrt{a} \div \sqrt[6]{a^5} \times \sqrt[12]{a}$

問題１５

3 次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ を考えることとする。

このとき，a，b，c，d の値を定めることにより，次の問いに答えよ。

(1) 極値と最大値，最小値が一致するような 関数と定義域 を設定しなさい。

(2) 任意の区間で，極値をとらないような関数を設定しなさい。

解答例（略解）

(1) $y = -2x^3 + 3x^2 + 12x$　$(-2 \leqq x \leqq 3)$　　(2) $y = x^3$　←　意外とこれに気づけていない！

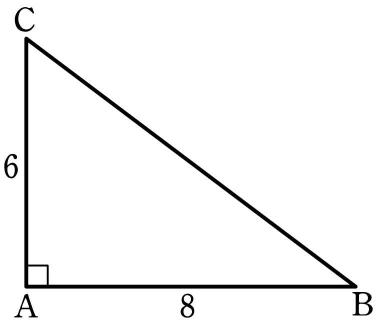
問題１６

AB＝8，AC＝6，∠A＝90° である直角三角形 ABC がある。

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) については解答のみでよい。

(2)については設問に従って解答しなさい。



(1)　$\overrightarrow{BC}$ と平行な単位ベクトル

解)　　$\pm\dfrac{1}{10}\left(\vec{c}-\vec{b}\right)$

(2)　$\overrightarrow{AB}$ に垂直な単位ベクトルを求めたい。

　　$\boxed{\text{Aさんの考え}}$

　　「三角形ABC が∠A＝90° である直角三角形だから，AB⊥ACとなるから $\overrightarrow{AB}$ に垂直な単位ベクトルは $\vec{c}$ 」「答え $\vec{c}$ 」

　　という誤答をしてしまった。

　あなたならAさんにどのようにアドバイスをしますか。正しい解答を下の解答欄に記入し，アドバイスを文章で記述しなさい。

(2) の正しい解答	$\dfrac{1}{6}\vec{c}$，　$-\dfrac{1}{6}\vec{c}$

アドバイス	(例)$\vec{c}$ と逆向きのベクトル $-\vec{c}$ も $\overrightarrow{AB}$ に垂直であること。$\vec{c}$ の大きさは 6 であるから単位ベクトル，つまり大きさ 1 のベクトルにするために 6 で割る必要があることをアドバイスする。 (ベクトルには向きと大きさで定まることを書けていれば○)

問題１７

$\vec{a}=(3,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 2)$ とし，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$　(t は実数) とする。

$\left|\vec{c}\right|$ の最小値と，そのときの t の値を求めよ。

という問題を考えているAさんとB先生の会話である。

次の問いに答えよ。解答は答えのみを解答欄に記入しなさい。

A：いきなり $\left|\vec{c}\right|$ の最小値と言われても，どうしたらいいのでしょう

B：順を追って考えていきましょう。まずは $\vec{c}$ の成分を求めましょう。

A：はい。$\vec{c}=\boxed{\text{ア}}$ となります。

B : 次に $|\vec{c}|$ を考えるわけですが，そのまま計算するよりも $|\vec{c}|^2$ を計算
する方が後の式変形も楽ですね。

A : たしかにそうですね。$|\vec{c}|^2$ を t を用いて表すと $\boxed{\text{イ}}$ です。

B : t の 2 次式が出てきましたね。これを平方完成すれば $|\vec{c}|^2$ の最小値がわかりますよ。

A : $t=\boxed{\text{ウ}}$ のとき $|\vec{c}|^2$ は最小値 $\boxed{\text{エ}}$ をとります。

B : $|\vec{c}|\geqq 0$だから $|\vec{c}|^2$ が最小となるとき $|\vec{c}|$ も最小ですね。

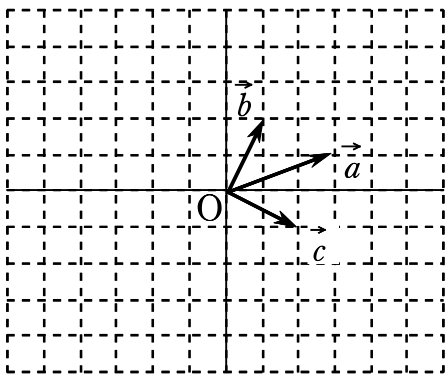
A : はい。$|\vec{c}|$の最小値は $\boxed{\text{オ}}$ ですね。

B : よくできました。このように計算でも求めることができますが，
実は図形的な意味を考えても面白いですよ。

(1) 空欄ア～オにあてはまるものを答えよ。
ただし，イは整理して簡潔にした形で答えること。

ア	$(3+t\,,1+2t)$	イ	$5t^2+10t+10$
ウ	-1	エ	5
オ	$\sqrt{5}$		

(2) 次の図に(1)で求めた $\vec{c}$ を書き入れ，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ の位置関係を答えよ。



$\vec{b}$ と $\vec{c}$ の位置関係

垂直

問題１８

『n を自然数とする。n から $2n$ までの自然数の平方の総和

$$S=n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2+(2n)^2 \quad \cdots①$$ を求めよ。』

という問題に対して，先生が方針を説明しています。以下の問いに答えなさい。

じゃあ，この問題を２通りの方法で解いてみましょう。

＜方針その１＞

① の右辺の n^2 を除く項をΣを使って表すと　$S=n^2+\sum_{k=1}^{n}\boxed{\text{ア}}$　となるのですが，わかりますか

こうしてしまえばΣの性質を使って， S を求めることが出来ますね。

＜方針その２＞

もう一つは　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$　…②　となることを利用する

方法です。 $n \geqq 2$ のとき，① の右辺は，1 から $2n$ までの自然数の平方の総和

$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2+(2n)^2$　から

1 から $\boxed{\text{イ}}$ までの自然数の平方の総和　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+\left(\boxed{\text{イ}}\right)^2$

を引くことで求めることが出来ます。

最後に，求めた S が $n=1$ のときにも成立するかどうか確認してみましょう。

② のような和の公式は「1から ○○まで」 という使い方しか出来ないので，注意が必要ですね。

では，２通りの方法で S を求めてみましょう。

(1)　文中の $\boxed{\text{ア}}$， $\boxed{\text{イ}}$ に当てはまる式を答えなさい。(答のみで良い) 【2点×2】

（ア）　$(n+k)^2$　　　（イ）　$n-1$

(2)　＜方針その１＞ で S を求めなさい。ただし，(3) と答えが同じになることを利用して，途中式を省くことは禁止します。途中式を省略せずに書き，答えは因数分解された形で表すこと 【5点】

$$S=n^2+\sum_{k=1}^{n}(n+k)^2$$

$$=n^2+\sum_{k=1}^{n}(n^2+2nk+k^2)$$

$$=n^2+n^2\sum_{k=1}^{n}1+2n\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=n^2+n^2\cdot n+2n\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=2n^2(n+1)+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{12n+(2n+1)\}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(14n+1)$$

(3)　＜方針その２＞ で S を求めなさい。ただし，(2) と答えが同じになることを利用して，途中式を省くことは禁止します。途中式を省略せずに書き，答えは因数分解された形で表すこと 【5点】

$n \geqq 2$ のとき

$$S=\sum_{k=1}^{2n} k^2-\sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 2n\cdot(2n+1)(4n+1)-\frac{1}{6}(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)$$

$$=\frac{1}{6}n\{2(2n+1)(4n+1)-(n-1)(2n-1)\}$$

$$=\frac{1}{6}n(14n^2+15n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(14n+1) \quad \cdots ③$$

$n=1$ のとき，①より $S=1^2+2^2=5$ であるから，③は $n=1$ でも成り立つ。

以上より，すべての自然数 n に対して， $S=\frac{1}{6}n(n+1)(14n+1)$

問題１９

以下の文章を読んで, 問いに答えなさい。

太郎さんは複素数平面の授業で n 乗根について学習し, 次のような問題に取り組んだ。

問題

複素数 z に対して，方程式 $z^4=-16$ の解を求めよ。

この問題を見て, 太郎さんは次のように解答した。

解） z は複素数であるので, $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とすると,

$z^4=r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)$ である。

また,

$-16=16(\cos\pi+i\sin\pi)$ より,

$r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=16(\cos\pi+i\sin\pi)$ である。

両辺を比較すると,

$r^4=16 \quad \Longrightarrow \quad r=\pm 2$

$4\theta=\pi \quad \Longrightarrow \quad \theta=\frac{\pi}{4}$

よって,

$$z=\pm 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\pm\sqrt{2}(1+i)$$

問い

(1) 太郎さんは, ある考えを正しく理解できていないため, 太郎さんの解答には間違いがある。上記の解答をみた範囲で, 太郎さんは何について正しく理解できていないかを以下の選択肢からすべて選び番号で答えなさい。また, それはどの部分を見て判断したかを上記の解答の該当する部分に○をつけて明示しなさい。

①加法•減法　②共役な複素数　③ 2 点間の距離　④極形式

⑤乗法•除法　⑥回転　⑦ド•モアブルの定理　⑧ n 乗根

答え　④, ⑧

(2) 正しい解答を記述せよ。

$z^4=r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)$

-16 を極形式で表すと　$-16=16(\cos\pi+i\sin\pi)$

よって　$r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=16(\cos\pi+i\sin\pi)$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$r^4=16$, $4\theta=\pi+2k\pi$ (k は整数)

$r>0$ であるから　$r=2$　…… ②

また　$\theta=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で考えると, $k=0$, 1, 2, 3 であるから

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3}{4}\pi$, $\dfrac{5}{4}\pi$, $\dfrac{7}{4}\pi$　…… ③

②, ③ を ① に代入すると, 求める解は

$z=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$, $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

(+1点問題)

太郎さんの解答がどうして間違っているか理由を説明しなさい。

問題２０

　ある日, 太郎さんと花子さんは数学の授業で「はさみうちの原理」を習った。次の問題に対する二人の会話を読んで, 問いに答えよ。

問題

極限 $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ を求めよ。

解答）　$0 \leqq \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqq 1$ であるから

$0 \leqq \left|x\sin\frac{1}{x}\right| = |x|\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqq |x|$

したがって，$0 \leqq \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leqq |x|$

$\lim_{x\to 0}|x| = 0$ であるから

$\lim_{x\to 0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right| = 0$

よって，　$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

花子：すごく洗練された解答ね！

太郎：へ…？どうして？まったく何をやってるか分からないんだけど…。

花子：太郎さんの気持ちはよく分かるわ。たぶん最初の 1 行目から何をやってるかが意味不明なんでしょ。

太郎：そうだよ！何でもかんでも絶対値をつけて僕たち生徒を惑わしてくるのに腹が立つんだよ。
花子さんもっと分かりやすく教えてよ。

花子：確かにそうね。でも闇雲に絶対値をつけてるってことは絶対にないでしょ。きっと意味があるのよ。今日は数学を探究して楽しみましょ！
今から私が間違った解答をするから間違いを指摘してみて。

間違った解答）

x は定義域を指定されていないので, 任意の実数をとりうる。そのため, $\frac{1}{x}$ も任意の実数をとりうる。したがって,

$$-1 \leqq \sin\frac{1}{x} \leqq 1 \qquad \text{であるので}$$

各辺に x をかけると,

$$-x \leqq x\sin\frac{1}{x} \leqq x$$

ここで,　$\lim_{x\to 0}(-x) = 0$,　$\lim_{x\to 0} x = 0$

はさみうちの原理より, $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

花子：太郎さん, どう？

問）　太郎さんを助けるために花子さんの解答の間違いを指摘し, 正しい解答をせよ。

※ここでの正しい解答とは, 上記の四角で囲まれている部分に記入されている解答ではなく, 絶対値をつけない場合の解答はどうなるかを明示せよということである。

解答例）　各辺に x をかけると,

$$-x \leqq x\sin\frac{1}{x} \leqq x$$ 　の部分が誤りである。

正しい解答）

x は定義域を指定されていないので, 任意の実数をとりうる。そのため, $\frac{1}{x}$ も任意の実数をとりうる。

したがって,

$$-1 \leqq \sin\frac{1}{x} \leqq 1 \quad \cdots ①$$ 　である。

ここで, 次の場合が考えられる。

(ｉ) $x>0$ のとき

このとき, ①の各辺に x をかけると,

$$-x \leqq x\sin\frac{1}{x} \leqq x$$ 　である。

ここで,　$\lim_{x\to 0}(-x)=0$,　$\lim_{x\to 0} x=0$

はさみうちの原理より, $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$

(ⅱ) $x<0$ のとき

このとき, ①の各辺に x をかけると,

$$x \leqq x\sin\frac{1}{x} \leqq -x$$ 　である。

ここで,　$\lim_{x\to 0}(-x)=0$,　$\lim_{x\to 0} x=0$

はさみうちの原理より, $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$

(ｉ), (ⅱ) より, $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$ である。