「はさみうちの原理」を使って求めにくい極限値を求めよう

確認 **はさみうちの原理** sandwich theorem（教科書 p81） イタリアやロシアでは「**二人の警察官の定理**」として知られる。容疑者 が二人の警察官に挟まれているとすれば，二人の警察官が部屋に入るときには，容疑者も必然的にその部屋に入ることになる」からである。

$a_n \leqq c_n \leqq b_n (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ ならば，数列$\{c_n\}$は収束し，$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$

＊極限値が存在することとその極限値がわかるという強力な原理ですが，どのようなときに使うのでしょうか。

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}$ ならば$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$ のように＝…＝…と**等式**変形すればよく，「はさみうちの原理」を使う必要はない。しかし，$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{6}}{n}$ ではそうはいかない。

三角関数の性質から $-1 \leqq \sin\frac{n\pi}{6} \leqq 1$ よって，$-\frac{1}{n} \leqq \frac{\sin\frac{n\pi}{6}}{n} \leqq \frac{1}{n}$ しかも$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であり，ここで「はさみうちの原理」を使って $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{6}}{n}=0$ となるわけである。

ポイントであり，難所でもあるのは $a_n \leqq c_n \leqq b_n (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ を満たす**不等式**を自力で(あるいは直前にあるヒントを見逃さないで)見出すことである。

問題1 次の問いに答えよ。

(1) $\frac{n^2}{n^2+n} \leqq \frac{n^2}{n^2+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ を示せ。

【証明】 $n=1, 2, 3, \cdots$ より$n \geqq 1$ 両辺にn^2をたして$n^2+n \geqq n^2+1$

$n^2+n \geqq n^2+1>0$ であるから，逆数をとって， $\frac{1}{n^2+n} \leqq \frac{1}{n^2+1}$ （注）$0<a<b$のとき，$\frac{1}{a} \geqq \frac{1}{b}$

両辺に$n^2(>0)$を掛けて， $\frac{n^2}{n^2+n} \leqq \frac{n^2}{n^2+1}$ 終

(2) $\frac{n^2}{n^2+n} \leqq a_n \leqq \frac{n^2}{n^2+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ のとき，極限値$\lim_{n\to\infty} a_n$を求めよ。

【解】 $\frac{n^2}{n^2+n} \leqq a_n \leqq \frac{n^2}{n^2+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ ……①

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$，$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}=1$ より $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1$……②

①，②から，はさみうちの原理によって，$\lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\underline{1}}$ ……(答)

問題2 $\frac{n}{n^2+n} \leqq b_k \leqq \frac{n}{n^2+1}$ (nは自然数，$k=1, 2, 3, \cdots\cdots, n$) のとき， $a_n=b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n$ とし，極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めたい。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\frac{n^2}{n^2+n} \leqq a_n \leqq \frac{n^2}{n^2+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ であることを示せ。

Hint
$$\left.\begin{array}{l}\frac{n}{n^2+n} \leqq b_1 \leqq \frac{n}{n^2+1}\\ \frac{n}{n^2+n} \leqq b_2 \leqq \frac{n}{n^2+1}\\ \frac{n}{n^2+n} \leqq b_3 \leqq \frac{n}{n^2+1}\\ \vdots \\ \frac{n}{n^2+n} \leqq b_n \leqq \frac{n}{n^2+1}\end{array}\right\} n\text{個}$$

【証明】 $\frac{n}{n^2+n} \leqq b_k \leqq \frac{n}{n^2+1}$ (nは自然数，$k=1, 2, 3, \cdots\cdots, n$) より

$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+n} \leqq \sum_{k=1}^{n} b_k \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+1}$

すなわち $\frac{n}{n^2+n}\cdot n \leqq a_n \leqq \frac{n}{n^2+1}\cdot n$ （注）cがkに無関係の定数のとき，$\sum_{k=1}^{n} c = nc$

つまり $\frac{n^2}{n^2+n} \leqq a_n \leqq \frac{n^2}{n^2+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$

(2) 極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

【解】 問題1の(2)から $\lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\underline{1}}$ ……(答) 問題1(2)と同じ問題！

問題3 教科書 数学Ⅲp97 章末問題B4

$a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots)$ のとき

(1) $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqq a_n \leqq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots)$ を示せ。

【証明】 $0<\sqrt{n^2+1} \leqq \sqrt{n^2+k} \leqq \sqrt{n^2+n}$ $(k=1, 2, 3, \cdots, n)$ であるから

逆数をとって, $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \geqq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \geqq \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ $(k=1, 2, 3, \cdots, n)$

(注) $0<a \leqq b$のとき, $\frac{1}{a} \geqq \frac{1}{b}$

すなわち, $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ $(k=1, 2, 3, \cdots, n)$

したがって, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqq \sum_{k=1}^{1}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

これより, $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

つまり, $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqq a_n \leqq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots)$ 終

(2) 極限値 $\lim a_n$を求めよ。

【解】 (1)より, $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqq a_n \leqq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots)$ ……①

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$……②

①, ②から, はさみうちの原理によって, $\lim_{n\to\infty} a_n=1$ ……(答)

問題4 極限値 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3n}{\sqrt{2n^4-k^2}}$ を求めよ。

難しく見えるかもしれませんが, $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{3n}{\sqrt{2n^4-k^2}}=\frac{3n}{\sqrt{2n^4-1^2}}+\frac{3n}{\sqrt{2n^4-2^2}}+\frac{3n}{\sqrt{2n^4-3^2}}+\cdots\cdots$

$\cdots\cdots+\frac{3n}{\sqrt{2n^4-n^2}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots)$として, これまで通り極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めることになります。

「はさみうちの原理」を使うための不等式を作りましょう。

Hint $\sqrt{2n^4-n} \leqq \sqrt{2n^4-k} \leqq \sqrt{2n^4-1}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots, n$($n$は自然数))

【解】$1 \leqq k \leqq n$ より$0<2n^4-n^2 \leqq 2n^4-k^2 \leqq 2n^4-1$

よって, $\sqrt{2n^4-n^2} \leqq \sqrt{2n^4-k^2} \leqq \sqrt{2n^4-1}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots, n$($n$は自然数))

逆数をとって, $\frac{1}{\sqrt{2n^4-1}} \leqq \frac{1}{\sqrt{2n^4-k^2}} \leqq \frac{1}{\sqrt{2n^4-n^2}}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots, n$($n$は自然数))

$3n(>0)$を掛けて, $\frac{3n}{\sqrt{2n^4-1}} \leqq \frac{3n}{\sqrt{2n^4-k^2}} \leqq \frac{3n}{\sqrt{2n^4-n^2}}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots, n$($n$は自然数))

$k=1$から$k=n$までの総和をとって, $\sum_{k=1}^{n}\frac{3n}{\sqrt{2n^4-1}} \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{3n}{\sqrt{2n^4-k^2}} \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{3n}{\sqrt{2n^4-n^2}}$

すなわち, $\frac{3n^2}{\sqrt{2n^4-1}} \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{3n}{\sqrt{2n^4-k^2}} \leqq \frac{3n^2}{\sqrt{2n^4-n^2}}$ ……①

(注) cがkに無関係の定数のとき, $\sum_{k=1}^{n}c=nc$

また, $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{\sqrt{2n^4-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{2-\frac{1}{n^4}}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{\sqrt{2n^4-n^2}}==\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{2-\frac{1}{n^2}}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$……②

①, ②から, はさみうちの原理によって, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3n}{\sqrt{2n^4-k^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ……(答)