

「はさみうちの原理」を使って求めにくい極限值を求めよう

確認 はさみうちの原理 sandwich theorem (教科書 p81) イタリアやロシアでは「二人の警察官の定理」として知られる。「容疑者が二人の警察官に挟まれているとすれば、二人の警察官が部屋に入るときには、容疑者も必然的にその部屋に入ることになる」からである。

$$a_n \leq c_n \leq b_n (n=1, 2, 3, \dots), \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha \text{ ならば, 数列 } \{c_n\} \text{ は収束し, } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$$

* 極限值が存在することとその極限值がわかるという強力な原理ですが、どのようなときに使うのでしょうか。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n}}{n}$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1$ のように $= \dots = \dots$ と等式変形すればよく、「はさみ

うちの原理」を使う必要はない。しかし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{6}}{n}$ ではそうはいかない。

三角関数の性質から $-1 \leq \sin \frac{n\pi}{6} \leq 1$ よって、 $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin \frac{n\pi}{6}}{n} \leq \frac{1}{n}$ しかも $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ であり、ここで「はさみ

うちの原理」を使って $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{6}}{n} = 0$ となるわけである。

ポイントであり、難所でもあるのは $a_n \leq c_n \leq b_n (n=1, 2, 3, \dots), \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$ を満たす不等式を自力で(あるいは直前にあるヒントを見逃さないで)見出すことである。

問題1 次の問いに答えよ。

(1) $\frac{n^2}{n^2+n} \leq \frac{n^2}{n^2+1} (n=1, 2, 3, \dots)$ を示せ。

(2) $\frac{n^2}{n^2+n} \leq a_n \leq \frac{n^2}{n^2+1} (n=1, 2, 3, \dots)$ のとき、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

問題2 $\frac{n}{n^2+n} \leq b_k \leq \frac{n}{n^2+1} (n \text{ は自然数, } k=1, 2, 3, \dots, n)$ のとき、 $a_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$ とし、

極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めたい。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $\frac{n^2}{n^2+n} \leq a_n \leq \frac{n^2}{n^2+1} (n=1, 2, 3, \dots)$ であることを示せ。

Hint

$$\frac{n}{n^2+n} \leq b_1 \leq \frac{n}{n^2+1}$$

$$\frac{n}{n^2+n} \leq b_2 \leq \frac{n}{n^2+1}$$

$$\frac{n}{n^2+n} \leq b_3 \leq \frac{n}{n^2+1}$$

}

n個

$$\frac{n}{n^2+n} \leq b_n \leq \frac{n}{n^2+1}$$

(2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

問題3 教科書 数学Ⅲp97 章末問題B4

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(1) $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ を示せ。

(2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

問題4 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{3n}{\sqrt{2n^4 - k^2}}$ を求めよ。

難しく見えるかもしれませんが、 $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{3n}{\sqrt{2n^4 - k^2}} = \frac{3n}{\sqrt{2n^4 - 1^2}} + \frac{3n}{\sqrt{2n^4 - 2^2}} + \frac{3n}{\sqrt{2n^4 - 3^2}} + \dots$
 $\dots + \frac{3n}{\sqrt{2n^4 - n^2}} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ として、これまで通り極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めることになります。

「はさみうちの原理」を使うための不等式を作りましょう。

Hint $\sqrt{2n^4 - n^2} \leq \sqrt{2n^4 - k^2} \leq \sqrt{2n^4 - 1} \quad (k=1, 2, 3, \dots, n(n \text{ は自然数}))$