数学Ⅱ No.8　複素数　2年　組　番名前

教科書pp.36－37, 問題集p.61

第1節　複素数と2次方程式の解

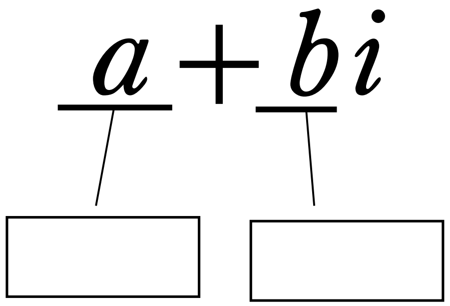
1　複素数とその計算

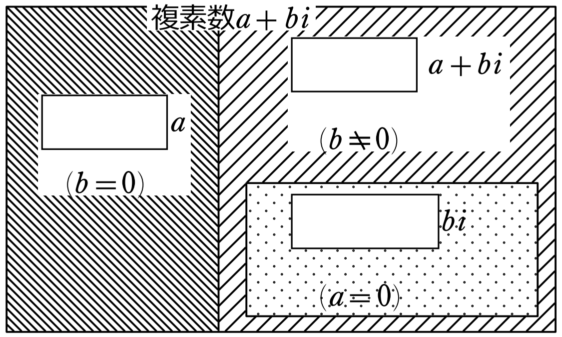
A　複素数

新しい数iについて考えてみよう！

2乗すると-1になる新しい数を文字$\boxed{\quad}$で表します。つまり $\boxed{\quad} = \boxed{\quad}$ （最重要）

iと2つの実数a, bを用いて$a+bi$の形に表される数を$\boxed{\quad}$といいます。





iは日常生活においてはまず見ることのない数です。実際，iはimaginaryの頭文字であり，日本語で「想像上の」という意味です。なぜ，このようなiを新しい数として導入しなければいけなかったのかについてはプリントの最後に書いたので是非見ておいてください。

［例1］ 次の複素数の実部と虚部をいえ。

方針　$a+bi$の形に変形して考える。aが実部，bが虚部

(1)　$3-2i$　　$3-2i=3+(-2)i$より　　実部$\boxed{3}$，虚部$\boxed{-2}$

(2)　$\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$　　$\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$より　　実部$\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$，虚部$\dfrac{\boxed{\sqrt{3}}}{\boxed{2}}$

(3)　2　　$2=2+0i$より　　実部$\boxed{2}$，虚部$\boxed{0}$

(4)　i　　$i=0+1i$より　　実部$\boxed{0}$，虚部$\boxed{1}$

［練習1］ 次の複素数の実部と虚部をいえ。

(1)　$-3+5i$

(2)　$\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$

(3)　1

(4)　$-i$

＜複素数の相等＞

2つの複素数が等しいのは，実部，虚部両方が一致する場合とします。

a, b, c, dを実数とする。

$a+bi=c+di \iff \boxed{\quad}=\boxed{\quad}$ かつ $\boxed{\quad}=\boxed{\quad}$

とくに　$a+bi=0 \iff \boxed{\quad}=\boxed{\quad}$ かつ $\boxed{\quad}=\boxed{\quad}$

［例題1］ 次の等式を満たす実数x, yの値を求めよ。

$$(x+y)+(x+2)i=0$$

(解)

答え出たら代入して検算！

[練習2]　次の等式を満たす実数x, yの値を求めよ。

(1)　$(x-3)+(x+y)i=0$

(2)　$(x-2y)+(2x-3y)i=4+7i$

(3)　$(2+i)x+(3-2i)y=-9+20i$　　(チャートp.61[基本例題38])

数学の物語No.3 なぜ虚数単位iを新しい数として導入しないといけないのか(i誕生の歴史)

なぜ,日常生活で見ない想像上の数であるiを新しい数として導入しないといけないのだろう？数学Ⅲで「複素数平面」という単元を学習すると複素数のありがたみが少し分かると思うんだけど, 数学Ⅱはiという数がいきなり出てきて困惑してるよね。今回は虚数単位iがどのように誕生したのか数学の歴史を見ていって,「なぜiが必要なのか」という疑問について考えていこう！

インドの数学者ブラーマグプタ(597－668)は2次方程式の解の公式を次のように導きました。

2次方程式$ax^2+bx+c=0$ $(a\fallingdotseq 0)$の解は$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

この公式は中学校から馴染み深い公式だね。2次方程式の解の公式は実数a, b, c,四則演算,ルートを使って解を求められるすごい便利な公式だよ。

そのあとしばらく経って,ニコロ・ フォンタナ(1506－1557)は3次方程式にも解の公式があるんじゃないかと考え, 3次方程式について研究しました。その解の公式の結果が次のようなとても長い式でした。

3次方程式$ax^3+bx^2+cx+d=0$の解は

$$x=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{(-27a^2d+9abc-2b^3)^2+4(3ac-b^2)^3}-27a^2d+9abc-2b^3}}{3\sqrt[3]{2}\,a}+\frac{\sqrt[3]{2}(3ab-b^2)}{3a\sqrt[3]{\sqrt{(-27a^2d+9abc-2b^3)^2+4(2ac-b^2)^3}-27a^2d+9abc-2b^3}}-\frac{b}{3a}$$

$$x=-\frac{1}{6\sqrt[3]{2}\,a}(1-i\sqrt{3})\sqrt[3]{\sqrt{(-27a^2d+9abc-2b^3)^2+4(2ac-b^2)^3}-27a^2d+9abc-2b^3}+\frac{(1+i\sqrt{3})(3ab-b^2)}{3\times 2^{\frac{2}{3}}a\sqrt[3]{\sqrt{(-27a^2d+9abc-2b^3)^2+4(2ac-b^2)^3}-27a^2d+9abc-2b^3}}-\frac{b}{3a}$$

$$x=-\frac{1}{6\sqrt[3]{2}\,a}(1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{\sqrt{(-27a^2d+9abc-2b^3)^2+4(2ac-b^2)^3}-27a^2d+9abc-2b^3}+\frac{(1-i\sqrt{3})(3ab-b^2)}{3\times 2^{\frac{2}{3}}a\sqrt[3]{\sqrt{(-27a^2d+9abc-2b^3)^2+4(2ac-b^2)^3}-27a^2d+9abc-2b^3}}-\frac{b}{3a}$$

(これはみんなでも頑張れば導くことはできるよ!ちなみに４次方程式の解の公式もあるけど５次以上は不思議なことに存在しません。

これはかなり複雑だからもちろん覚える必要は全くないからね。注目してほしいのは一部分だけ。iが解の公式の中に隠れているよね。

このように, 3次方程式の解の公式は実数a, b, c, d, 四則演算, ルートに加えて, 例の虚数単位iが出てくるんだ。フォンタナは解の公式を導く過程で$\sqrt{-3}$という式が出てきた。もし虚数単位iを使わなかったら, $\sqrt{-3}$が出てくる②,③は「解なし」となり, 3次方程式の解の公式は①の式のみ,「解は1つ」ということになるよね。でもこれっておかしい。例えば,$x^3-x=0$という3次方程式は解が$x=-1, 0, 1$となる。解の公式は「解は１つ」, でも実際は「解は３つ」これっておかしいよね。そこでフォンタナは世界で初めて$i^2=-1$となる虚数単位iを使って先ほどの$\sqrt{-3}$を「$\sqrt{-3}=\sqrt{3i^2}=\sqrt{3}\,i$」と式変形をして,①, ②, ③からなる 3次方程式の解の公式を導いたんだ！さっきの$x^3-x=0$の解を解の公式で求めてみると解はちゃんと　$x=-1,0,1$になる。iを使うと数学はちゃんと機能することが分かるね。

虚数単位iは想像上の数でイメージはなかなかできない数ではあるけど, 数学では無いと困っちゃうとても重要な数なんだね!