数学Ⅰ No.46　多角形の面積1年　組　番名前

教科書pp.151－152, 問題集pp.199,202－204

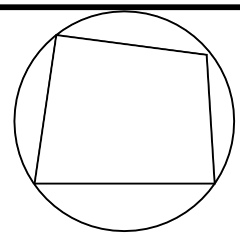
B　多角形の面積

数学Aで次のような定理を学習する。

<円に内接する四角形>

円に内接する四角形の対角の和は$\boxed{\quad\quad}$である。

証明は後日数学Aで学習するときにしよう!



これを用いて, 円に内接する四角形の面積を求めてみよう!

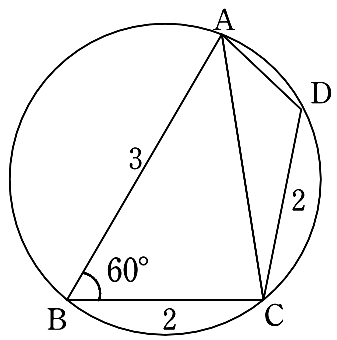
[応用例題3]　円に内接する四角形ABCDにおいて,

AB＝3, BC＝2, CD＝2, ∠B＝60°

のとき, 次のものを求めよ。

(1)　ACの長さ　(2)　ADの長さ　(3)　四角形ABCDの面積

考え方　△ABC, △ACDを別々に分けて考える



(1)　△ABCにおいて余弦定理を用いると

$AC^2=\boxed{\quad\quad\quad\quad}=\boxed{\quad\quad}=\boxed{\quad}$

AC＞0より　AC＝$\boxed{\quad}$

(2)　円に内接する四角形であるから　$D=180^\circ-\boxed{\quad}=\boxed{\quad}$

AD＝xとして, △ACDにおいて余弦定理を用いると,

$\boxed{\quad}=\boxed{\quad\quad\quad\quad}$

$\boxed{\quad}=\boxed{\quad\quad\quad}$

$\boxed{\quad\quad\quad}=0$

$x=\boxed{\quad}, \boxed{\quad}$

$x>0$より　AD＝$\boxed{\quad}$

(3)　また, 四角形ABCDの面積をSとすると

S＝$\boxed{\quad\quad}+\boxed{\quad\quad}$

＝$\boxed{\quad\quad\quad\quad}+\boxed{\quad\quad\quad\quad}$

＝$\boxed{\quad}$

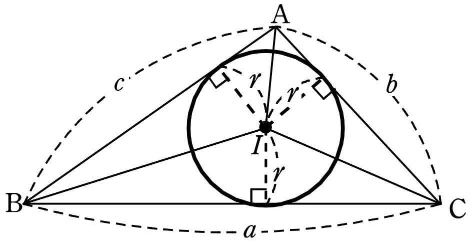
[練習31]　円に内接する四角形において, AB＝5, BC＝4, CD＝4, ∠B＝60°のとき, 四角形ABCDの面積Sを求めよ。

答　$6\sqrt{3}$

＜内接円の半径と三角形の面積＞

三角形の各辺をa, b, c, 内接円の半径をrとすると

$S=\boxed{\qquad\qquad}$



高校数学では「内接円の半径」といえば, この公式のみ!

(ちなみに「外接円の半径」といえば, 正弦定理のみ)

[応用例題4]　△ABCにおいて, $a=5, b=6, c=7$のとき, この三角形の内接円の半径rを求めよ。

考え方「内接円の半径」とあるので$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$を使う!　$S=\frac{1}{2}bc\sin A$やヘロンの公式

a, b, cは分かっているので, あとは三角形の面積Sを違う面積公式で求めてみる。

(解)　余弦定理より$\cos A=\dfrac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}}=\dfrac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}}$であるから

$\sin A>0$より　$\sin A=\sqrt{\boxed{\quad}}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}}\right)^2}=\dfrac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}}$

$S=\dfrac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}}\cdot\boxed{\quad}\cdot\boxed{\quad}\cdot\dfrac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}}=\boxed{\quad}$

$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$より$\boxed{\quad}=\frac{1}{2}r\left(\boxed{\quad}+\boxed{\quad}+\boxed{\quad}\right)$　よって$r=\dfrac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}}$

[練習32]　△ABCにおいて, $a=4, b=3, c=2$ のとき, この三角形の内接円の半径rを求めよ。

答　$r=\dfrac{\sqrt{15}}{6}$

高校数学の物語　No.28　円に内接する四角形の面積公式(ブラーマグプタの公式)について

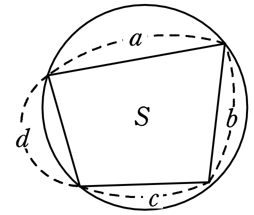
今回のプリントでは円に内接する四角形の性質について勉強しました。以前数学Ⅰの三角比ではNo.45でヘロンの公式を学習しました。今回紹介するブラーマグプタの公式はヘロンの公式の四角形バージョンの公式だよ。

まず, ブラーマグプタの公式を発見した7世紀のインドの数学者･天文学者ブラーマグプタについて触れておこう。ブラーマグプタはインドの数学を書物でヨーロッパに伝えたり、数学を用いて天文学を研究した人物でした。インドの数学を土台としてその後ヨーロッパの数学が発展していったことを考えるとブラーマグプタが果たした役割はとても重要でした。彼が7世紀に作ったブラーマグプタの公式を紹介しよう。

[ブラーマグプタの公式]

四角形ABCDは円に内接しているとする。四角形の各辺をそれぞれa, b, c, dとすると四角形の面積Sは

$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$　$\left(ただし s=\dfrac{a+b+c+d}{2}\right)$



(証明)　$\angle BAD=\theta$とおくと, 内接する四角形の性質より$\angle BCD=180°-\theta$となる。余弦定理より

$BD^2=a^2+d^2-2ad\cos\theta$ …①　$BD^2=b^2+c^2-2bc\cos(180°-\theta)$ …②

①, ②より　$a^2+d^2-2ad\cos\theta=b^2+c^2+2bc\cos\theta$　$\therefore \cos\theta=\dfrac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}$ …③

$S=\frac{1}{2}ad\sin\theta+\frac{1}{2}bc\sin(180°-\theta)=\frac{1}{2}(ad+bc)\sin\theta=\frac{1}{2}(ad+bc)\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\frac{1}{2}(ad+bc)\cdot\dfrac{\sqrt{4(ad+bc)^2-(a^2-b^2-c^2+d^2)^2}}{2(ad+bc)}$

$=\frac{1}{4}\sqrt{\{2(ad+bc)+a^2-b^2-c^2+d^2\}\{2(ad+bc)-a^2+b^2+c^2-d^2\}}$

$=\frac{1}{4}\sqrt{\{(a+d)^2-(b-c)^2\}\{(b+c)^2-(a-d)^2\}}$

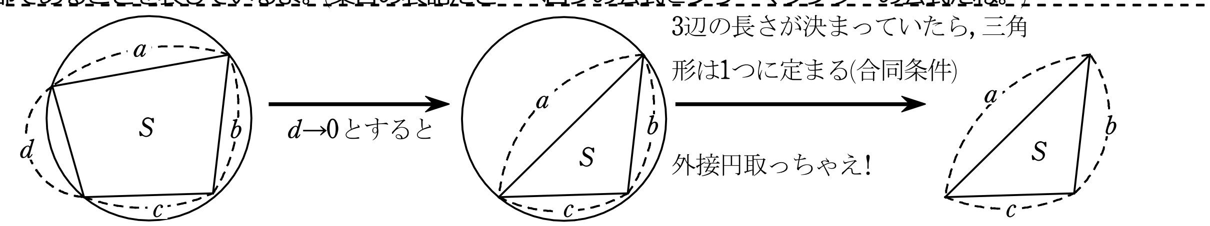
$=\sqrt{\left(\dfrac{a+b+c+d}{2}-a\right)\left(\dfrac{a+b+c+d}{2}-b\right)\left(\dfrac{a+b+c+d}{2}-c\right)\left(\dfrac{a+b+c+d}{2}-d\right)}$

$=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$　$\left(ただし, s=\dfrac{a+b+c+d}{2}\right)$

【証明の流れ】
四角形の面積
三角形の面積×2
面積公式でsinが知りたい
余弦定理でcos求める

計算は長くて, 難しく見えるけど, 証明の流れは基本的で立命館大や名古屋大の入試にも出たことがあるよ。

また, ブラーマグプタの公式で$d\to 0$とするとヘロンの公式になるよね。これはヘロンの公式がブラーマグプタの公式の一部であることを表しているよ。(集合の表記だと　ヘロンの公式⊂ブラーマグプタ　の公式だね。)



ブラーマグプタ$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$　ヘロン$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$