高校の数学～無限の足し算～　3年　組　番名前

[今日のテーマ]

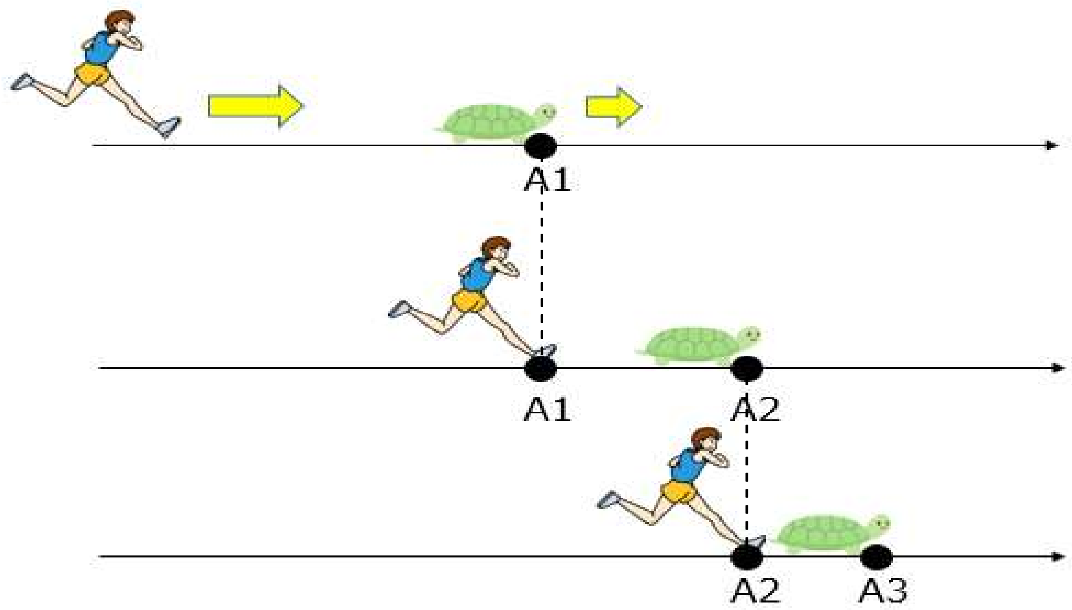
紀元前の言い伝え「アキレスとカメ」から無限の足し算(無限級数)を計算してみよう！

(例)　$\frac{1}{2}$をかけていった数を無限に足す

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots\cdots\cdots=\boxed{?}$$

アキレスとカメ

「かけ足の選手アキレスがカメに追いつこうとして走っている。カメの出発点にアキレスが来たとき，カメは少し先へ動いている。さらにその位置までアキレスが来たとき, カメはまた少し先へ動いている。」



問題：アキレスはカメに永久に追いつくことが出来ないか？

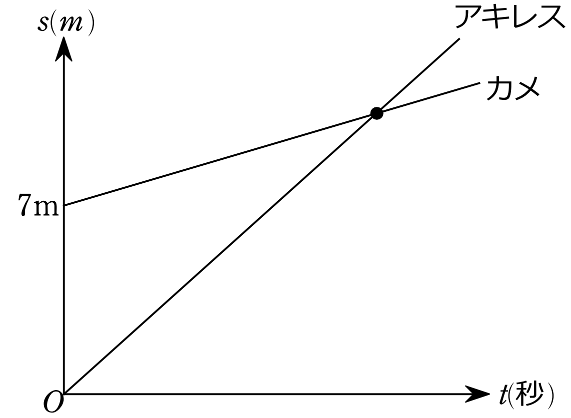
[問題]　アキレスが秒速$\boxed{1\text{m}}$, カメが秒速$\boxed{0.1\text{m}}$で進むとし，もともとカメは$\boxed{7\text{m}}$先にいたとする。

アキレスのスタート地点の何m先で追いつくことができるか？

横に時間t(秒)をとり, 縦に距離$s(m)$をとるとアキレスとカメは以下のような1次関数で表せる。

アキレス　$s=t$　…①

カメ　$s=0.1t+7$　…②



[1],[2]の2通りで追いつくまでの距離を求めてみよう！

[1]　$\boxed{\quad}$を埋めながら①, ②の連立方程式を解いて, sを求めてみよう！

①, ②より$s=\boxed{\quad}s+\boxed{\quad}$

$(1-\boxed{\quad})s=\boxed{\quad}$

$$s=\frac{\boxed{\quad}}{1-\boxed{\quad}}=\frac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}}\text{(秒後)}$$

[2]　$\boxed{\quad}$を埋めながら, sを求めてみよう！

最初はカメが$\boxed{\quad}$m先にいる。

アキレスがカメの初めの位置に来るのは$\boxed{\quad}$秒後だからカメは$\boxed{\quad}$m 進む

2番目の位置に来るのは$\boxed{\quad}$秒後だからカメは$\boxed{\quad}$m 進む

3番目の位置に来るのは$\boxed{\quad}$秒後だからカメは$\boxed{\quad}$m 進む

これを繰り返すとアキレスが追いつくまでの距離sは

$s=\boxed{\quad}+\boxed{\quad}+\boxed{\quad}+\boxed{\quad}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$　(秒後)

[1], [2]より

$$\boxed{\quad}+\boxed{\quad\quad}+\boxed{\quad\quad\quad}+\boxed{\quad\quad\quad\quad}+\cdots\cdots\cdots=\frac{\boxed{\quad}}{1-\boxed{\quad}}$$

無限の足し算の公式がこれで完成です!

無限の足し算の公式♪　　(rが-1より大きくて, 1より小さいとき)

$$a+(a\times r)+(a\times r\times r)+(a\times r\times r\times r)+\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{\boxed{\quad\quad}}{\boxed{\quad\quad}}$$

補足　高校での公式は

[無限等比級数の公式]

初項a, 公比rの無限等比級数は$|r|<1$のとき収束し、その和は

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}=\frac{a}{1-r}$$

です!難しいよね。あと3年後高校生になって勉強する人がこの中でもいるでしょうね。

(例)　$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots\cdots$　を計算してみよう!

無限の足し算にチャレンジ!

[問題]　次の無限の足し算をしてみよう!

(1)　$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots$

(2)　$6+2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\cdots\cdots$