変量 x，y に対して，変量 u，v を $u=ax+b$，$v=cy+d$ とする。

平均について

$$\overline{u}=\frac{1}{n}(u_1+\cdots+u_n)=\frac{1}{n}\{(ax_1+b)+\cdots+(ax_n+b)\}$$

$$=\frac{1}{n}\{a(x_1+\cdots+x_n)+nb\}=\frac{a}{n}(x_1+\cdots+x_n)+b=a\overline{x}+b$$

$\overline{v}$ も同様に，$\overline{v}=c\overline{y}+d$

分散と標準偏差について

$$s_u^2=\frac{1}{n}\{(u_1-\overline{u})^2+\cdots+(u_n-\overline{u})^2\}$$

$$=\frac{1}{n}\left[\{(ax_1+b)-(a\overline{x}+b)\}^2+\cdots+\{(ax_n+b)-(a\overline{x}+b)\}^2\right]$$

$$=\frac{1}{n}\{(ax_1-a\overline{x})^2+\cdots+(ax_n-a\overline{x})^2\}=\frac{1}{n}\left[\{a(x_1-\overline{x})\}^2+\cdots+\{a(x_n-\overline{x})\}^2\right]$$

$$=\frac{1}{n}\{a^2(x_1-\overline{x})^2+\cdots+a^2(x_n-\overline{x})^2\}=\frac{a^2}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}=a^2\cdot s_x^2$$

よって，$s_u=\sqrt{a^2\cdot s_x^2}=|a|\cdot s_x$

s_v^2 も同様に，$s_v^2=c^2\cdot s_y^2$ ，$s_v=|c|\cdot s_y$

共分散について

$$s_{uv}=\frac{1}{n}\{(u_1-\overline{u})(v_1-\overline{v})+\cdots+(u_n-\overline{u})(v_n-\overline{v})\}$$

$$=\frac{1}{n}[\{(ax_1+b)-(a\overline{x}+b)\}\{(cy_1+d)-(c\overline{y}+d)\}+\cdots$$

$$\cdots+\{(ax_n+b)-(a\overline{x}+b)\}\{(cy_n+d)-(c\overline{y}+d)\}]$$

$$=\frac{1}{n}\left[\{a(x_1-\overline{x})\}\{c(y_1-\overline{y})\}+\cdots+\{a(x_n-\overline{x})\}\{c(y_n-\overline{y})\}\right]$$

$$=\frac{1}{n}\{ac(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+\cdots+ac(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})\}$$

$$=\frac{ac}{n}\{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+\cdots+(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})\}=ac\cdot s_{xy}$$

相関係数について

$$r_{uv}=\frac{s_{uv}}{s_u\cdot s_v}=\frac{ac\cdot s_{xy}}{|a|\cdot s_x\cdot|c|\cdot s_y}=\frac{ac}{|ac|}\cdot\frac{s_{xy}}{s_x\cdot s_y}=\frac{ac}{|ac|}\cdot r_{xy}$$