円周率π　＝？

【復習】

ネイピア数 e ＝？

【復習】 e^xのマクローリン展開

$$e^x$$

$$= e^0 + \frac{e^0}{1!}x + \frac{e^0}{2!}x^2 + \frac{e^0}{3!}x^3 + \frac{e^0}{4!}x^4 \cdots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \cdots$$

【復習】

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \cdots$$

8桁電卓で計算！

$$e = 2.7180553 \cdot\cdot\cdot$$

小数第3位まで同じ！

実際

$$\boxed{e = 2.718281828459045 \cdot\cdot\cdot}$$

【円周率πの値は？】

π＝3.14159265　358979

産医師 異　国に向こう．産後厄なく，

3238462　643383279

産婦みやしろに．　虫 散々闇に鳴く．

502884197　…

後礼には早よ行くな

【円周率πの暗唱記録】

1973 年	ピアスン（13 歳）	1210 桁	(Timothy Pearson, 英；1960-)	ギネス
1975 年	プルーフ（19 歳）	4096 桁	(Simon Plouffe, カナダ；1956-) (BBP 公式の P さん)	ギネス
1979 年	フィオーレ（18 歳）	10625 桁	(David Fiore, アメリカ；1961-)	ギネス
1995 年	後藤裕之（21 歳）	42,195 桁	(ごとう ひろゆき；1973-)	ギネス
2004 年	原口　證（58 歳）	54,000 桁	(はらぐち あきら；1945-)	
2005 年	呂　　超（23 歳）	67,890 桁	(ルー チャオ, 中国；1982-)	ギネス
2006 年	チャハル（24 歳）	43,000 桁	(Chahal, Krishan, インド；)	
2006 年	原口　證（60 歳）	10 万桁		
2006 年	原口　證（64 歳）	101,031 桁	(iPad に打ち込む)	

πの値も計算で求めたいよね～

【計算機以前の主な円周率πの計算】

3世紀	アルキメデス	$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ (3.14084…)　(3.142857…)
2世紀	プトレマイオス	$\frac{377}{120}$ (＝3.14166…)
263年	劉徽	3.141024 ＜π＜3.142704
5世紀	祖沖之	3.1415926＜π＜3.1415927
500年頃	アールヤバタ	$\frac{3927}{1250}$(＝3.1416)
650年頃	ブラフマーグプタ	$\sqrt{10}$ ＝3.162277…

【計算機以前の主な円周率πの計算】

1424年	アル・カーシー	16桁
1579年	ヴィエト	3.1415926535＜π＜3.1415926537
1610年	ヴァン・ケーレン	35桁
1681年	関孝和	16桁（増約術＝ｴｲﾝｹﾝ加速）
1699年	シャープ	72桁
1706年	マチン	100桁
1722年	建部賢弘	42桁（『綴術算経』）
1872年	W.　シャンクス	707桁
1948年	ファーガスン	808桁

【問題】

円周率π＞3.05 を示せ。
（電卓使用可）

【発表方法】

班の代表者が①②を簡潔に答える

① どんな方法で試したか？

② その結果でてきたπの値

【問題】

円周率π＞3.05 を示せ。

（電卓使用可）

$$円周率\pi=\frac{円周の長さ}{直径の長さ}$$

【問題】 円周率π＞3.05 を示せ。

【解法①】

実際に円筒の円周を測る

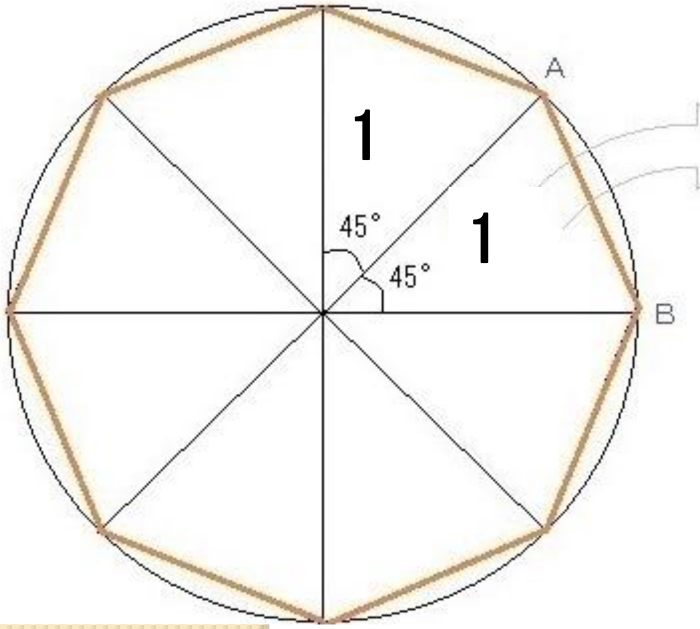
↓

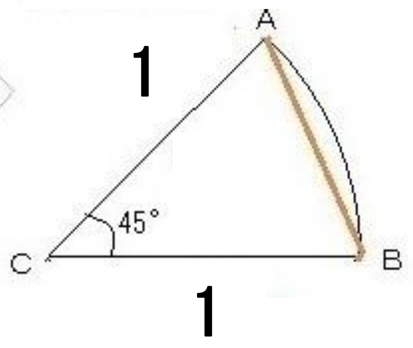
$$\text{円周率}\pi=\frac{\text{円筒の底面の円周の長さ}}{\text{円筒の底面の直径の長さ}}$$

$$=\frac{21.9}{6.9}$$

$$=3.173913\cdots$$

【問題】 円周率π＞3.05 を示せ。
【解法②】円に内接する正八角形を用いる





・弧AB $= \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

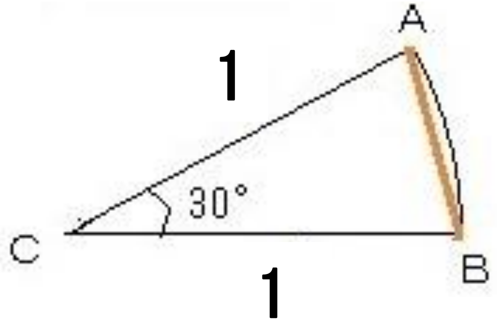
・$AB^2 = 1 + 1 - 2cos45^{\circ}$
$= 2 - \sqrt{2}$

AB <弧ABより $\sqrt{2-\sqrt{2}} < \frac{\pi}{4} \rightarrow 4\sqrt{2-\sqrt{2}} < \pi$

$3.061\cdots < \pi$

【問題】 円周率π＞3.05 を示せ。

【解法③】 円に内接する正十二角形を用いる



・弧AB $= \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

・$AB^2 = 1 + 1 - 2cos30^{\circ}$
$= 2 - \sqrt{3}$

AB ＜弧ABより $\sqrt{2-\sqrt{3}} < \frac{\pi}{6}$ →$6\sqrt{2-\sqrt{3}} < \pi$

$3.105\cdots < \pi$

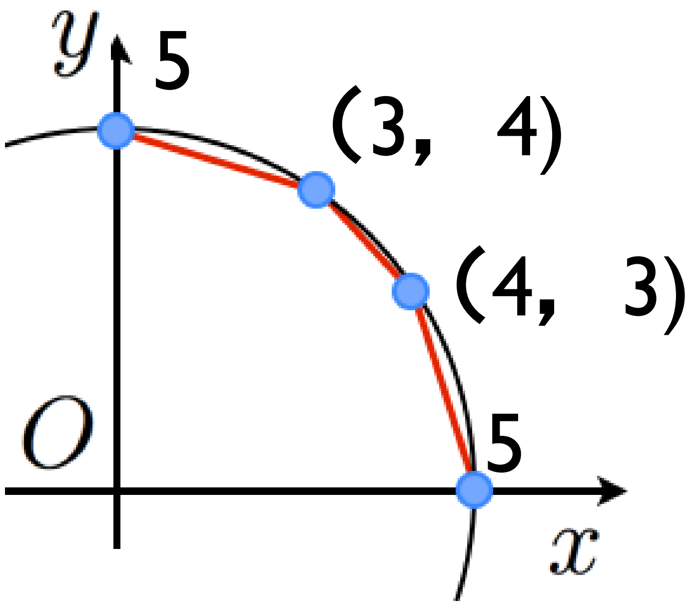
【問題】 円周率 π ＞3.05 を示せ。

【解法④】 周の長さがわかる図形を用いる

$$4\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{10}\right) < 10\pi$$

$$0.4\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{10}\right) < \pi$$

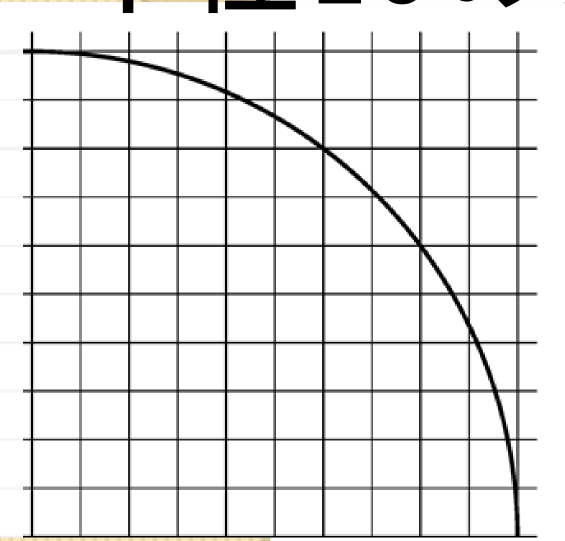
$$3.0955\cdots < \pi$$



【問題】 円周率 $\pi > 3.05$ を示せ。

【解法⑤】 方眼紙とコンパスで面積をみる

半径10の円を考える



$$4 \times 69 < 100\pi < 4 \times 86$$

$$2.76 < \pi < 3.44$$

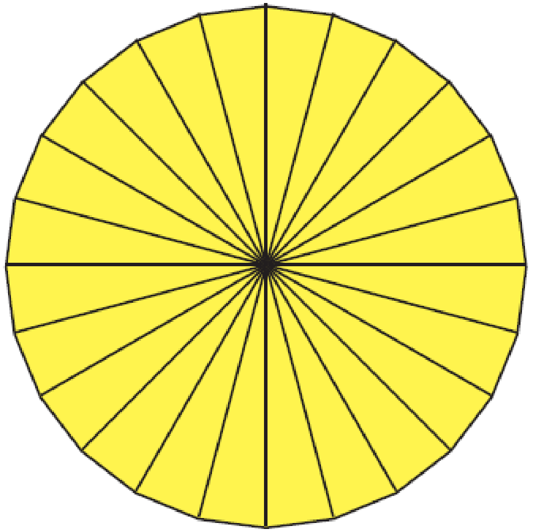
半径100の円を考えると

$$3.1016 < \pi < 3.1796$$

【問題】 円周率π＞3.05 を示せ。

【解法⑥】円に内接する正二十四角形を用いる

半径1の円に内接する正二十四角形の面積



$$\frac{1}{2}\sin 15^{\circ} \times 24 = 3(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

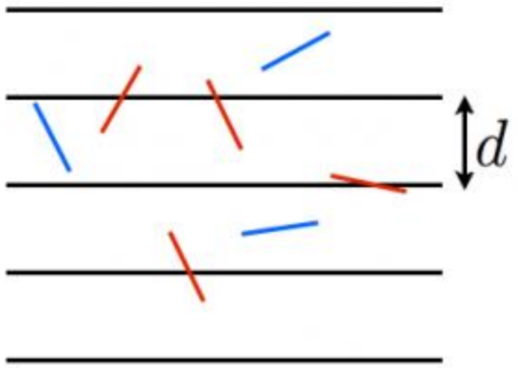
$$3\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) < 1^2\pi$$

$$3.105\cdots < \pi$$

【問題】 円周率π>3.05 を示せ。

【解法⑦】爪楊枝を落とす（ビュフォンの針）

$l \leqq d$とする。
平面上に間隔d で平行線を引く。
長さlの針を適当に投げたとき，
(針が平行線と交わる確率)=$\dfrac{2l}{\pi d}$



例：7本のうち4本が交わっている

$l = 6.5 \quad d = 7.0$で実験開始

→5000回中2957回交わった → $\dfrac{2957}{5000} = \dfrac{2 \times 6.5}{\pi \times 7.0}$

$\pi = 3.1402$

【問題】 円周率π ＞3.05 を示せ。

【解法⑧】 マクローリン展開を利用

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \geqq 1 - \frac{x^2}{2!}$$

$x = \frac{\pi}{6}$を代入

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \geqq 1 - \frac{\pi^2}{72} \rightarrow \pi \geqq \sqrt{72 - 36\sqrt{3}}$$

$$= 3.105\cdots$$

【円周率πの値を正確に出すには？！】

【復習】$\mathbf{y = \arctan} \boldsymbol{x}$ を思い出そう！

$$\boldsymbol{x = \tan y}$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

$$y = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

【円周率πの値を正確に出すには？！】

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$$

【円周率πの値を正確に出すには？！】

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots\right)$$

π＝3.0170724･･･

もっとたくさん計算しないといけない！

効率（収束）が悪い！！

【円周率πの値を正確に出すには？！】

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \cdots$$

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \frac{3}{1280} + \frac{5}{14336} + \frac{35}{589824} + \cdots$$

$$\pi = 3.14151$$

【円周率πの値を効率よく出すには？！】

≪πの公式 その１≫

① マチンの公式
$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$$

② オイラーの公式
$$\frac{\pi}{4}=5\arctan\frac{1}{7}+2\arctan\frac{3}{79}$$

③シュテルマーの公式
$$\frac{\pi}{4}=6\arctan\frac{1}{8}+2\arctan\frac{1}{57}+\arctan\frac{1}{239}$$

④Gaussの公式
$$\frac{\pi}{4}=12\arctan\frac{1}{18}+8\arctan\frac{1}{57}-5\arctan\frac{1}{239}$$

⑤Klingenstiernaの公式
$$\frac{\pi}{4}=8\arctan\frac{1}{10}-\arctan\frac{1}{239}-4\arctan\frac{1}{515}$$

【円周率πの値を効率よく出すには？！】

≪πの公式 その２≫

⑥ Vegaの公式

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-2\arctan\frac{1}{408}+\arctan\frac{1}{1393}$$

⑦ Huttionの公式

$$\frac{\pi}{4}=2\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}=2\arctan\frac{1}{2}-\arctan\frac{1}{7}$$
$$=3\arctan\frac{1}{4}+\arctan\frac{1}{99}$$

⑧ Daseの公式

$$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{8}$$

⑨ 高野喜久雄の公式

$$\frac{\pi}{4}=12\arctan\frac{1}{49}+32\arctan\frac{1}{57}$$
$$-5\arctan\frac{1}{239}+12\arctan\frac{1}{110443}$$

【円周率πの値を効率よく出すには？！】

【マチンの公式 $\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$ を使ってみよう！】

$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$ より，

$$\frac{\pi}{4}=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7+\cdots\right)$$

$$-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{239}\right)^7+\cdots\right)$$

【円周率πの値を効率よく出すには？！】

【マチンの公式 $\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$ を使ってみよう！】

$$\pi=\left(\boxed{\frac{16}{5}}-\frac{16}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{16}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5-\frac{16}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7+\cdots\right)$$

$$+\left(\boxed{-\frac{4}{239}}+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3-\frac{4}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5+\frac{4}{7}\left(\frac{1}{239}\right)^7+\cdots\right)$$

$\pi = 3.183263599$

【円周率πの値を効率よく出すには？！】

【マチンの公式 $\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$ を使ってみよう！】

$$\pi=\left(\boxed{\frac{16}{5}-\frac{16}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3}+\frac{16}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5-\frac{16}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7+\cdots\right)$$

$$+\left(\boxed{-\frac{4}{239}+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3}-\frac{4}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5+\frac{4}{7}\left(\frac{1}{239}\right)^7+\cdots\right)$$

$\pi=3.140597030$

【円周率πの値を効率よく出すには？！】

【マチンの公式 $\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$ を使ってみよう！】

$$\pi=\left(\frac{16}{5}-\frac{16}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{16}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5-\frac{16}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7+\cdots\right)$$

$$+\left(-\frac{4}{239}+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3-\frac{4}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5+\frac{4}{7}\left(\frac{1}{239}\right)^7+\cdots\right)$$

π ＝ 3.141621030

【円周率πの値を効率よく出すには？！】

【マチンの公式 $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$ を使ってみよう！】

$$\pi = \left(\frac{16}{5} - \frac{16}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{16}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 - \frac{16}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7 + \cdots\right)$$

$$+\left(-\frac{4}{239} + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3 - \frac{4}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5 + \frac{4}{7}\left(\frac{1}{239}\right)^7 + \cdots\right)$$

π ＝ 3.141591773

小数第5位まで同じ！

【円周率πの値を効率よく出すには？！】

【マチンの公式 $\dfrac{\pi}{4}=4\arctan\dfrac{1}{5}-\arctan\dfrac{1}{239}$ を使ってみよう！】

$$\pi=\left(\frac{16}{5}-\frac{16}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{16}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5-\frac{16}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7+\frac{16}{9}\left(\frac{1}{5}\right)^9-\cdots\right)$$

$$+\left(-\frac{4}{239}+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3-\frac{4}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5+\frac{4}{7}\left(\frac{1}{239}\right)^7-\frac{4}{9}\left(\frac{1}{239}\right)^9+\cdots\right)$$

$\pi = 3.141592683$

小数第7位まで同じ！

【円周率πの値を効率よく出すには？！】

【オイラーの公式 $\frac{\pi}{4}=5\arctan\frac{1}{7}+2\arctan\frac{3}{79}$を使ってみよう！】

$$\pi=20\arctan\frac{1}{7}+8\arctan\frac{3}{79}$$

$$=20\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{7}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\right)^7+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{7}\right)^9-\cdots\right)$$

$$+8\left(\frac{3}{79}-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{79}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{3}{79}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{3}{79}\right)^7+\frac{1}{9}\left(\frac{3}{79}\right)^9+\cdots\right)$$

π＝3.141592656

小数第8位まで同じ！

【マチンの公式 $\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$ を証明しよう！】

$\arctan\frac{1}{5}=\alpha$, $\arctan\frac{1}{239}=\beta$ とおく→ $\tan\alpha=\frac{1}{5}$, $\tan\beta=\frac{1}{239}$

今から $4\alpha-\frac{\pi}{4}=\beta$ を示す → $\tan\beta=\tan\left(4\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ を示す

$$\tan 2\alpha=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1-tan^2\alpha}=\frac{2\times\frac{1}{5}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{10}{24}$$

$$\tan 4\alpha=\frac{\tan 2\alpha+\tan 2\alpha}{1-\tan 2\alpha\tan 2\alpha}=\frac{2\tan 2\alpha}{1-tan^2 2\alpha}=\frac{2\times\frac{10}{24}}{1-\left(\frac{10}{24}\right)^2}=\frac{120}{119}$$

$$\tan\left(4\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan 4\alpha-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan 4\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}\times 1}=\frac{1}{239}=\beta$$

【挑戦】 s, t が正の実数のとき，

$$\arctan\frac{1}{s} = \arctan\frac{1}{s+t} + \arctan\frac{t}{s^2+st+1}$$ を証明しよう！

$\arctan\frac{1}{s} = \alpha$,　$\arctan\frac{1}{s+t} = \beta$, $\arctan\frac{t}{s^2+st+1} = \gamma$とおく

$\tan\alpha = \frac{1}{s}$,　$\tan\beta = \frac{1}{s+t}$,　$\tan\gamma = \frac{t}{s^2+st+1}$

今から $\alpha = \beta + \gamma$ $\rightarrow$ $\tan\gamma = \tan(\alpha - \beta)$ を示す

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+t}}{1+\frac{1}{s}\times\frac{1}{s+t}} = \frac{\frac{t}{s^2+st}}{1+\frac{1}{s^2+st}} = \frac{t}{s^2+st+1} = \tan\gamma$$

【自分だけの公式を作ろう！】 (s,tは正の実数)

① $\dfrac{\pi}{4}=4\arctan\dfrac{1}{5}-\arctan\dfrac{1}{239}$　⑪ $\arctan\dfrac{1}{s}=\arctan\dfrac{1}{s+t}+\arctan\dfrac{t}{s^2+st+1}$

⑪の$s=1,t=1$を代入

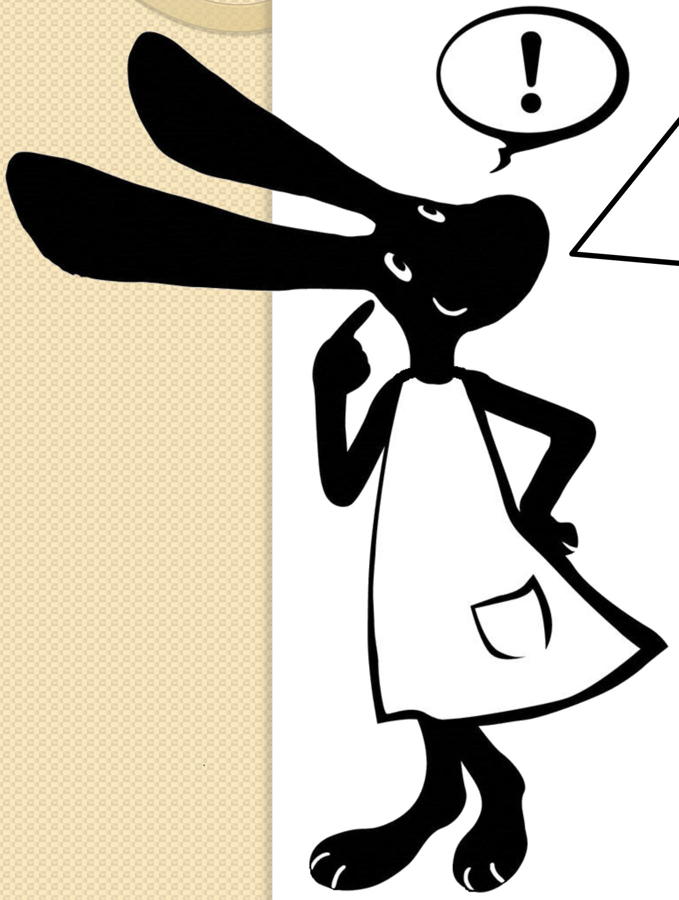
$$\arctan 1=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}\longrightarrow\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}\quad\cdots⑫$$

⑪の$s=70,t=29$を代入

$$\arctan\frac{1}{70}=\arctan\frac{1}{99}+\arctan\frac{1}{239}\longrightarrow\arctan\frac{1}{239}=\arctan\frac{1}{70}-\arctan\frac{1}{99}$$

①に代入

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{70}+\arctan\frac{1}{99}$$



みんなの作った公式が
歴史を作るかも？！
みんなの**可能性は∞**
将来の活躍を
　期待しています！！