★ 定積分再考（「不定積分主義」に依らない積分法の導入）

定積分の定義

区間$[a,\ b]$で連続である関数$f(x)$があって，この区間をn等分したときの分点を$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n=b$としたとき，

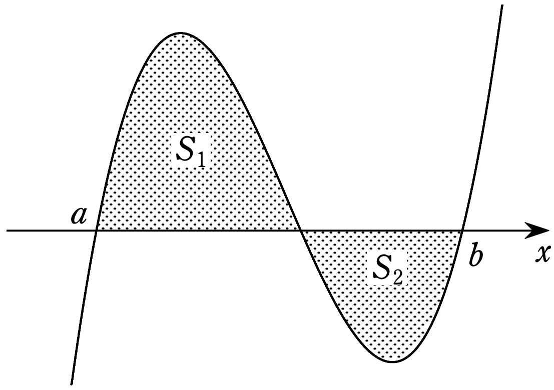
$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\triangle x\right) \quad （ただし，\triangle x=\frac{b-a}{n}）$$

である．この等式は，右辺の極限で左辺の定積分を定義したもので，この時点では，定積分は微分法とは何の関係もない概念である．

図のようなグラフをもつ関数$f(x)$では，

$$\int_a^b f(x)dx=S_1+(-S_2)=S_1-S_2$$

となる．（S_1，S_2は面積）



微分法との関係

さて，$\underline{\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)\text{が成り立つような}c\text{が}a\text{と}b\text{の間に少なくとも 1 つ存在する}}$ので，

〔下線部分は積分の平均値の定理〕

$F(x)=\int_a^x f(t)dt$とおくと，

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+h} f(t)dt=f(c)h$$

となるcがxと$x+h$の間に存在する．両辺をhで割って，

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(c).$$

$h\to0$のとき$c\to x$であるから，$f(c)\to f(x)$となり，したがって，

$$F'(x)=\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x).$$

すなわち，$F(x)=\int_a^x f(t)dt$は$f(x)$の原始関数である．

よって，$f(x)$の原始関数の 1 つを$G(x)$とすると，

$$\int_a^x f(t)dt=G(x)+C$$

となり，$x=a$として$C=-G(a)$が得られるので，$x=b$として

$$\int_a^b f(t)dt=G(b)+C=G(b)-G(a).$$

変数をtからxにかえて，〔定積分は積分変数の文字に依らない〕

$$\int_a^b f(x)dx=G(b)-G(a).$$