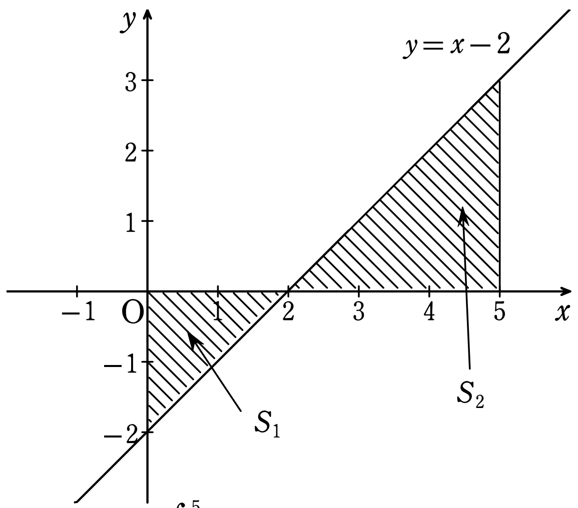
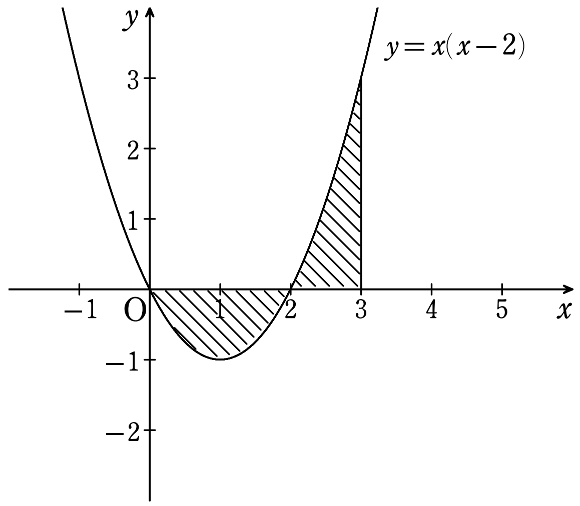
数学Ⅱ　積分法②

2　積分法と微分法の関係

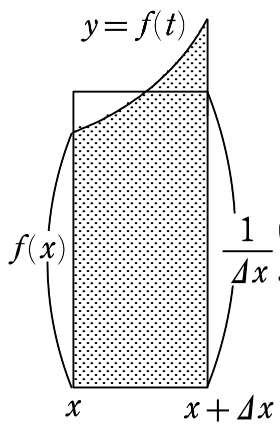
$\int_0^5 (x-2)dx$ の値は図の 2 つの三角形の面積から求めることができた。では，$\int_0^3 x(x-2)dx$ はどうだろうか.



$\int_0^5 (x-2)dx = -S_1 + S_2$



$y=f(t)$ の $t=a$ から $t=x$ までの定積分を積分区間の上端 x の関数とみて,



$\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \cdots①$$

とおくと,

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

であるから,

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt .$$

この式の右辺は，$x \leqq t \leqq x+\Delta x$ における $f(t)$ の平均値であるから，$\Delta x \to 0$ のとき，右辺は $f(x)$ に近づくことがわかる．すなわち,

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f(x) .$$

この式の左辺は，$F'(x)$ であるから,

$$F'(x) = f(x) . \quad \cdots②$$

①，②から,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) . \quad \cdots③$$

③を微分積分学の基本定理という．②は，$\int_a^x f(t)dt$ は「x で微分すると $f(x)$ になる関数」すなわち<u>$f(x)$ の原始関数</u>であることを示している．この定理により，積分の実際の計算は原始関数を媒介にすることで劇的に簡単になる.

$f(x)$ の任意の原始関数を $G(x)$ とする．<u>$f(x)$ の 2 つの原始関数の間には定数の差しかない</u>から,

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt + c \quad (c \text{ は定数})$$

とかくことができて，$x=a$ として $G(a) = \int_a^a f(t)dt = 0 + c = c$ が得られ,

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt + G(a) .$$

さらに，$x=b$ として $G(b) = \int_a^b f(t)dt + G(a)$ が得られるから,

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)}$$

が成り立つ．$G(b)-G(a)$ を $\Big[\,G(t)\,\Big]_a^b$ のようにかく.

【例と練習問題】

(1)　$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} + c\right]_0^2 = \left(\frac{8}{3} + c\right) - (0 + c) = \frac{8}{3}$.

(2)　$\int_1^3 2t\,dt = \Big[\,t^2\,\Big]_1^2 = 4 - 1 = 3$.

(3)　$\int_0^2 x(x-2)dx =$

(4)　$\int_0^3 x(x-2)dx =$

(5)　$\int_0^4 x(x-2)dx =$

(6)　$\int_0^3 |x(x-2)|\,dx =$

(7)　$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & (x < 1) \\ 4x - 3 & (1 \leqq x) \end{cases}$ のとき，$\int_{-2}^2 f(x)dx =$