数学Ⅱ　積分法①

1　定積分の定義

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$（$[a,\ b]$ は $a \leqq x \leqq b$ を表す）で連続であるとする．$[a,\ b]$ を n 等分し，分点を

$$a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n = b$$

とする．このとき，定積分 $\int_a^b f(x)dx$ を極限値

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\triangle x$$

で定義する．ただし，$\triangle x = \dfrac{b-a}{n}$ である．

- $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$ は，$f(x_k)\Delta x$ の k を 1 から n まで変化させて足しあわせたもの，すなわち

$$f(x_1)\Delta x + f(x_2)\triangle x + \cdots + f(x_{n-1})\triangle x + f(x_n)\triangle x$$

のこと．この式で，n を限りなく大きくしたときの極限値

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\triangle x = \lim_{n\to\infty}(f(x_1)\triangle x + f(x_2)\triangle x + \cdots + f(x_{n-1})\triangle x + f(x_n)\triangle x)$$

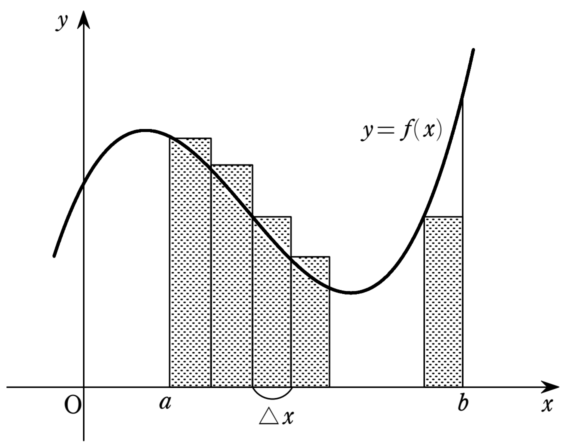
が定積分 $\int_a^b f(x)dx$ である．〔∞ は無限大を表す記号〕

＜$\sum$ を使った和の表し方の例＞

$$\sum_{k=1}^{5} k = 1+2+3+4+5 = 15,\quad \sum_{t=1}^{n}(t^2-3t) = (1-3)+(4-6)+(9-9)+\cdots+(n^2-3n),$$

$$\sum_{i=1}^{4} a_i b_i = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4.$$

- 関数 $y = f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ でつねに $f(x) \geqq 0$ であれば，$\int_a^b f(x)dx$ は，区間 $[a,\ b]$ において曲線 $y = f(x)$ と x 軸に挟まれた図形の面積に等しい．



- $\int_a^b f(x)dx$ は，「a から b までのインテグラル $f(x)dx$」などとよむ．

$\int_a^b f(x)dx$ は $\int_a^b f(t)dt$ などとかいてもよい．**定積分の値は積分変数の文字に依らない**．

【練習問題】

(1)　定積分の定義にしたがって，$\int_0^1 x^2dx$ の値を求めよ．〔$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を使う〕

(2)　区間 $[0,\ 1]$ において，曲線 $y = x^3$ と x 軸に挟まれた部分の面積を定積分で表し，その値を求めよ．

〔$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$ を使う〕

(3)　次の定積分の符号をいえ．

（ｉ）$\int_1^2 x^2dx$

（ii）$\int_{-1}^1 (t^2-4)dt$

（iii）$\int_{-2}^5 udu$

(4)　次の定積分の値を求めよ．

（ｉ）$\int_1^3 (x+1)dx$

（ii）$\int_0^3 (3-x)dx$

（iii）$\int_0^5 (x-2)dx$