数学Ⅱ　微分法①

$\boxed{1}$ 次の問題を考えてみよう.

> １辺が 10cm の正方形の厚紙の４すみから同じ大きさの正方形を切り落とし，残りの部分を折り曲げてふたのない箱をつくる．箱の容積を最大にするには，箱の深さを何cm にすればよいか.

深さをx cm，容積を$f(x)$ cm³ とすると，x の範囲は＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿で，

$f(x)=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

増減を調べると，

x	(0)	1	2	3	4	(5)
$f(x)$						

正確な値はどうすれば求められるか？

グラフをかいたとき，「右上がりから右下がりに変わるところ」を見つける

グラフが滑らかであれば，局所的に直線（１次関数）で近似できるはず

この直線が水平になるところを見つければ…

$\boxed{2}$ １次関数へのおきかえ

２次関数$f(x)=5x-x^2$ は，$x=1$ の近くではどんな１次関数でおきかえられるか.
$y=f(x)$ とし，x が1からΔx だけ変化して$1+\Delta x$ になるとき，y が$f(1)$ からΔy だけ変化して$f(1)+\Delta y$ になるとすると，

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(1+\Delta x)-f(1)\\ &=\{5(1+\Delta x)-(1+\Delta x)^2\}-4\\ &=3\Delta x-(\Delta x)^2\end{aligned}$$

したがって，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3-\Delta x\to 3\ (\Delta x\to 0)\qquad\cdots(\mathrm{i})$$

となり，$y=f(x)$ は$x=1$ の近くで＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿におきかえられる.

〔（ｉ)は，$\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3-\Delta x)=3$ と書いたりする.　〕

【練習問題】２次方程式$5x-x^2=$ ＿＿＿＿＿＿の解を求めよ.
（$\boxed{2}$で求めた１次関数を下線部に入れる）

$\boxed{3}$ 微分係数

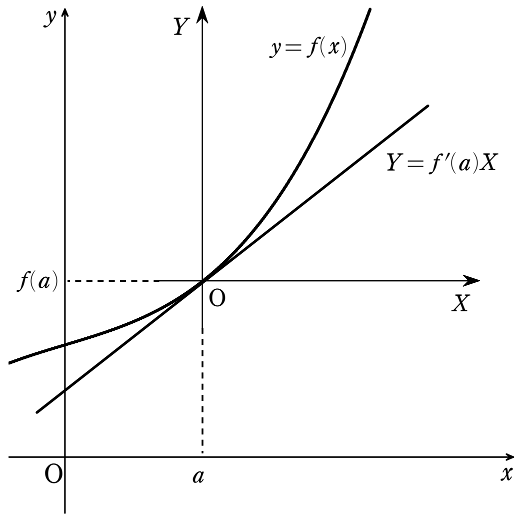
$x=a$ の近くでおきかえた１次関数のグラフの傾きが正ならば，y は$x=a$ の近くで増加の状態，傾きが負ならば，y は$x=a$ の近くで減少の状態にあると考えられる.

> $x=a$ において$f(x)$ を近似する１次関数のグラフの傾きを$f'(a)$ で表し，$f(x)$ の$x=a$ における微分係数という.

微分係数の符号を調べれば，関数の増減がわかることになる．$y=f(x)$ の$x=a$ における微分係数は，平均変化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ の $\Delta x\to 0$ のときの極限値で与えられる．すなわち，

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

点$(a,\ f(a))$ を原点に取り直すと，正比例 $Y=f'(a)X$ が成り立つ.



【練習問題】
(1)　$y=f(x)=x^2-2x$ について，$x=2,\ -1,\ 5$ における微分係数をそれぞれ求めよ.
(2)　(1)のそれぞれの点でこの関数を近似する１次関数を求めよ.