数学 III

最速降下曲線 (サイクロイド)

近畿大学附属高等学校　　井上 明

1　はじめに

3 年生の 2 学期になると, 一通り数学 III まで履修が終わり, 受験問題の演習の時間となる. すべての授業が演習となると, 生徒も大変なので, 息抜きに少し数学の話をする.

また, せっかく微積を学習したのだから, 少しぐらいベルヌーイの恩恵を受けても良いように思う. そこで, 最速降下曲線としてのサイクロイドについて紹介してみた.

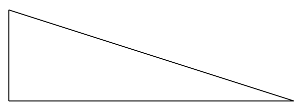
2　導入

長方形を用意して, 頂点から頂点への移動の最速経路を問う.

まず, 水平に持って尋ねてみると, 普通に対角線と答えてくれる. これを次に地面に垂直になるように持ちかえると, やはり対角線と答えてくれる生徒がほとんどである. しかし, 場を考えようと問いかける. そうすると『重力か』なんて声が聞こえたりする. どんな曲線になるかは正答は出ないが, 実際に前で実演すると受けが良い.[1]

3　Brachistochrone Problem

高さが $2h$ で横が πh である坂道をモデルに到着するまでの時間を考えてみよう.[2] 比較のためにまず直線の坂道では, 斜面の方向の加速度 a, 速度 v, 位置 x は



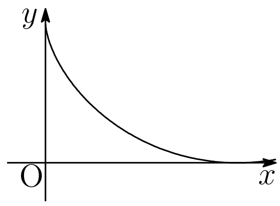
$$a(t) = \frac{2g}{\sqrt{\pi^2+4}},\ v(t) = \frac{2g}{\sqrt{\pi^2+4}}t,\ x(t) = \frac{g}{\sqrt{\pi^2+4}}t^2$$

となる. 斜面の長さが $\sqrt{\pi^2+4}h$ であるから, 斜面につく時刻は $t = \sqrt{\dfrac{(\pi^2+4)h}{g}}$ である.

[1] 動画を参照

[2] 重力加速度を g とする.

これに対して, サイクロイドの坂道ではどうなるかを計算してみよう. サイクロイドを媒介変数表示すると



$$\begin{cases} x = h\,(\theta - \sin\theta) \\ y = h\,(1 + \cos\theta) \end{cases}$$

となる. よって, 微小区間での距離は $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$ となる. また, 高さが y の速度 v は力学的エネルギー保存の法則 $mg(2h) = \dfrac{1}{2}mv^2 + mgy$ より, $v = \sqrt{2g(2h - y)}$ となる. よって, 微小時間 dt は距離 ds を速さ v で割ると求まり, この dt を積分すると到達時間 T が求まるので,

$$\begin{aligned} T &= \int \frac{ds}{v} = \int_0^\pi \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}}{\sqrt{2g(2h-y)}}d\theta = \int_0^\pi \frac{\sqrt{h^2(1-\cos\theta)^2 + h^2\sin^2\theta}}{\sqrt{2g}\sqrt{h(1-\cos\theta)}}d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^\pi \frac{\sqrt{2h^2(1-\cos\theta)}}{\sqrt{h(1-\cos\theta)}}d\theta = \sqrt{\frac{h}{g}}\int_0^\pi d\theta = \pi\sqrt{\frac{h}{g}} \end{aligned}$$

となる.

例えば,[3] 高さを 2m ととると $h = 1$ として, 直線の坂道の到達時間は $\sqrt{\dfrac{\pi^2 + 4}{g}} \fallingdotseq 1.18925$ 秒, サイクロイドの坂道の到達時間は $\dfrac{\pi}{\sqrt{g}} \fallingdotseq 1.0032$ 秒となる.

4 Tautochrone curve

サイクロイドの坂道は出発地点によらず, 最低点に到達する時間が同じである.

実際, 地点 (x_0, y_0) を出発点とし, このときの媒介変数 θ を θ_0 とする. 高さが y の速度 v は力学的エネルギー保存の法則 $mgy_0 = \dfrac{1}{2}mv^2 + mgy$ より, $v = \sqrt{2g(y_0 - y)} = \sqrt{2gh(\cos\theta_0 - \cos\theta)}$ となる. よって, 到達時間 T_0 は

$$T_0 = \int \frac{ds}{v} = \int_{\theta_0}^\pi \frac{\sqrt{h^2(1-\cos\theta)^2 + h^2\sin^2\theta}}{\sqrt{2gh}\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}d\theta = \sqrt{\frac{h}{g}}\int_{\theta_0}^\pi \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta_0 - \cos\theta}}d\theta$$

[3] 重力加速度 g を $9.80665\mathrm{m/s^2}$ として計算.

ここで $u=\cos\theta_0-\cos\theta$ とすると $d\theta=\dfrac{du}{\sin\theta}=\dfrac{du}{\sqrt{1-(\cos\theta_0-u)^2}}$ となるから,

$$
\begin{aligned}
\int_{\theta_0}^{\pi}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta_0-\cos\theta}}d\theta &= \int_0^{1+\cos\theta_0}\sqrt{\frac{1-\cos\theta_0+u}{u}}\cdot\frac{du}{\sqrt{1-(\cos\theta_0-u)^2}} \\
&= \int_0^{1+\cos\theta_0}\frac{du}{\sqrt{u\,(1+\cos\theta_0-u)}} \\
&= \int_0^{1+\cos\theta_0}\left\{\left(\frac{1+\cos\theta_0}{2}\right)^2-\left(u-\frac{1+\cos\theta_0}{2}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}du
\end{aligned}
$$

さらに, $s=\dfrac{2}{1+\cos\theta_0}\left(u-\dfrac{1+\cos\theta_0}{2}\right)$ とすると, $du=\dfrac{1+\cos\theta_0}{2}ds$ となり,

$$
\begin{aligned}
\int_{\theta_0}^{\pi}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta_0-\cos\theta}}d\theta &= \int_0^{1+\cos\theta_0}\left\{\left(\frac{1+\cos\theta_0}{2}\right)^2-\left(u-\frac{1+\cos\theta_0}{2}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}du \\
&= \frac{2}{1+\cos\theta_0}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\cdot\frac{1+\cos\theta_0}{2}ds \\
&= \int_{-1}^{1}\frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}=\pi
\end{aligned}
$$

したがって, $T_0=\pi\sqrt{\dfrac{h}{g}}$ となり, $T=T_0$ となる.

5　まとめ

最速降下曲線がサイクロイドであることはオイラー – ラグランジュ方程式を解かないといけないが, 先のような直線との比較や等時性などであれば, 高校生でも十分であるし, 計算はよい微積計算の練習となるように思う.

また, 場を考えると, 最速は直線ではなくなるが, 微積を使えばきちんと説明 (計算) できることはよい経験になるのではないか. 少し傾向は違うが, 微積をしっかり使って最短を求める入試問題 (東京工業大学) を紹介し話を終えた.

> 一辺の長さが 10m の正方形のプールの一つの角に監視員を置く. この監視員は水中は秒速 1m でプールの縁上は秒速 2m で移動するとする. この監視員がこのプールのどこへでも到達しうるには, 最短で何秒必要か計算せよ. ただし, 物事を単純化するため, (i) 監視員は点, プールの縁は線と考え, (ii) プールの縁上でも水中でもどの方向に曲がることも自由自在で, それぞれの秒速は一定だとする.