数学的な見方や考え方を育てる学習指導の工夫
～段階を踏んだ授業の展開方法を考えることを通して～

茨城県立日立第一高等学校　比嘉　忠史

1　主題設定の理由

近年，学校の現場では生徒の多様な進路に対応する授業や進路指導が求められている。一方，毎年受験生の授業を担当し，難関私立大学や国公立大学の２次試験などの問題だけを主に授業で教え続けることが出来る教員はごくわずかであるのも事実である。私自身，一昨年度，教員１０年目にして初めて受験数学に携わり，試行錯誤しながら受験指導した。その受験指導の中で最も私を悩ませたのが数学Ⅲの指導である。そこで，数学Ⅲの問題演習の授業を通して国公立大学２次試験レベルの問題を指導する為に必要なことは何かを考察しようと考え，主題を設定した。

2　研究のねらい

数学Ⅲの問題演習時の授業において，難易度の高い問題の解説をする際に，少しずつ難易度を高め，段階を踏んだ問題を解かせる事によって，理解を深めさせ，数学的な見方や考え方を育てることが出来るような学習指導の在り方を究明する。

3　研究の仮説

第３年次の問題演習の授業において，問題の難易度や出題内容を考察することによって，効果的な授業を展開することができるのではないだろうか。

4　仮説の検証方法

問題演習の前後にアンケートを実施し，学習結果を確認する。

5　研究の内容

5.1　基本的な考え方

平成２４年度より先行実施される新学習指導要領における数学科の目標で現行の指導要領の目標から「数学的活動を通して，数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め，事象を数学的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる」と改訂される。数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深めるために，問題の出題方法を考えることによって数学的な見方や考え方を育むことができるのではないかと考えた。

5.2　主題に迫るために

5.2.1　生徒の実態

本校は１学年６クラスで２年次より文系，理系，SSH のコースに分かれ，３年次では理系クラスで少人数授業を実施している。この研究においては，理系･SSH コースの３年次の生徒２９名を対象に実施した。

5.2.2　方法の手だて

３年次１０月の問題演習授業時に実施。数学Ⅲの分野を１週間ごとに１０分野に分けて問題演習，解説を行った。

5.2.3　今回の研究で扱った内容

回　数	単元名
第 1 回	面　積
第 2 回	区分求積
第 3 回	絶対値のついた積分
第 4 回	定積分で表された関数
第 5 回	積分漸化式
第 6 回	体　積
第 7 回	関数方程式
第 8 回	媒介変数
第 9 回	速度・加速度・水の体積
第10回	孤長

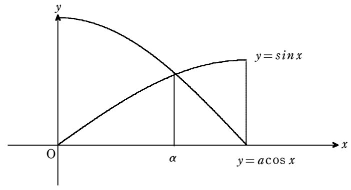
5.2.4　実践研究

今回は数学Ⅲの“定積分で表された関数”の分野において，実際に行った授業について紹介する。段階を踏んで授業を展開する際，最初にその分野で最も理解させたい問題を設定する。この分野については以下の問題を最終問題とする。

＜最終問題＞

$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-a\cos x|dx\ (a>0)$ を a の式で表し，最小値を求めよ。

【解 答】



………①

上図のように $y=\sin x$ と $y=a\cos x$ の交点の

x 座標を $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，　………②

$I(a)=-\int_0^{\alpha}(\sin x-a\cos x)\,dx+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-a\cos x)\,dx$ 　となり，…③

$$=\Big[\cos x+a\sin x\Big]_0^{\alpha}+\Big[-\cos x-a\sin x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$

$=(\cos\alpha+a\sin\alpha-1)+(-a+\cos\alpha+a\sin\alpha)$

$=2\cos\alpha+2a\sin\alpha-1-a$

ここで　$\sin\alpha=a\cos\alpha$ より，$\tan\alpha=a$ となるので，

$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ ，　$\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ となる。

よって

$I(a)=2\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+2a\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}-1-a=2\sqrt{1+a^2}-1-a$ 　……④

$I'(a)=\dfrac{2a}{\sqrt{a^2+1}}-1=\dfrac{2a-\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{3a^2-1}{\sqrt{a^2+1}\,(2a+\sqrt{a^2+1})}$ より

$I(a)$ の増減表は右のようになる。

よって，$I(a)$ は $a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき

最小値をとる。

ゆえに最小値は　$I\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\sqrt{3}-1$

a	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$I'(a)$		$-$	0	$+$
$I(a)$		↘	極小	↗

この問題を解くためには，解答の①から④の知識が最低限必要になる。

① 三角関数のグラフを正確に書くことができる。

② 交点の座標を求めることができない三角関数の面積を解くことができる知識がある。

③ 絶対値のついた定積分について，範囲を考えることによって，絶対値をはずす事ができる。

④ 定積分で表わされた関数の最小値を求める為に，関数を微分し，増減表を利用し解くことができる。

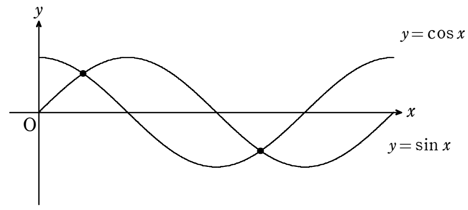
この最終問題については①から④まで全ての知識がないと解くことができないが，1 時間の授業という時間制限の中，この最終問題だけを解説しようとすると，必要とする知識や公式が多すぎて，たいていの場合，教員側が上手く説明することができないか，一方的に説明して生徒が全く理解できていないことが多い。

そこで，この問題を解くために必要な①から④までの知識を別の問題を解くことによって少しずつ理解させていこうと考え問題 $\boxed{1}$ を設定した。

問題 $\boxed{1}$

$0<x<2\pi$ において，2 つの曲線 $y=\sin x$，$y=\cos x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

【解 答】



……①

方程式 $\sin x=\cos x$ を解くと　$\sin x-\cos x=0$ より　…………⑤

$\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

ここで，$0<x<2\pi$ より $-\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{7}{4}\pi$

よって　$x-\dfrac{\pi}{4}=0$，$\dfrac{\pi}{2}$

ゆえに　$x=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{5}{4}\pi$

以上より 2 曲線の位置関係は上図のようになり，

$\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ のとき　$\sin x\geqq\cos x$，

従って，求める面積 S は

$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(\sin x-\cos x)dx$ 　…………⑥

$=\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}$ 　………⑦

$=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}$

問題 $\boxed{1}$ は教科書レベルの問題である。この問題で必要な知識は最終問題で必要な①と下の表の通りである。

⑤ 三角関数のグラフの交点の座標を求めることができる。

⑥ グラフと交点の座標から面積を求める事ができる。

⑦ 三角関数の定積分の計算ができる。

全て基本的な知識ばかりだが，次の問題につながる公式や考え方を習得することができるため，この問題を設定した。

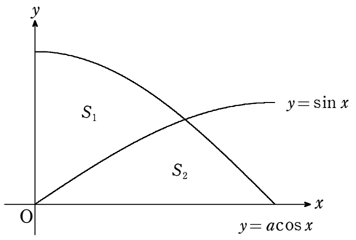
次に，知識②の確認とそれに伴って利用する公式を確認する為に問題 $\boxed{2}$ を設定した。

問題 $\boxed{2}$ を解くためには①と②の知識が必要になる。この問題は最初に三角関数のグラフを書かせ，その後，交点を求めさせるのだが，実際には交点の座標を求めることができないので，交点の座標を文字で表わし，その文字を利用して解く方法を教える。最終的に交点の座標は求まらないまま解を導くことができる。問題を解いた後で，②についての考え方を詳しく説明する。

問題 $\boxed{2}$

aを正の定数とする。曲線$y=a\cos x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と x軸，y軸とで囲まれた図形の面積を曲線 $y=\sin x$ が 2 等分するようなaの値を求めよ。

【解 答】



………①

上図のようにS_1，S_2を定めると，$S_1=S_2$ より $S_1+S_2=2S_1$となる。
交点の x座標を α とおくと，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos x\,dx=2\int_0^{\alpha}(a\cos x-\sin x)dx \text{ がいえる。} \quad \cdots\cdots⑦$$

$$\Big[a\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\Big[a\sin x+\cos x\Big]_0^{\alpha}$$

$$a=2(a\sin\alpha+\cos\alpha-1) \quad \cdots\cdots(※)$$

ここで，$\sin\alpha=a\cos\alpha$ となるように α を定めているので，……②
両辺を $\cos\alpha$ で割ると $\tan\alpha=a$ となり，

$$\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\ ,\quad \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \text{ となるので，}$$

(※)に代入すると，

$$a=2\left(a\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}-1\right)$$

$$a=2\left(\frac{a^2+1}{\sqrt{a^2+1}}-1\right)=2(\sqrt{a^2+1}-1)$$

よって　$a+2=2\sqrt{a^2+1}$

両辺を 2 乗すると　$(a+2)^2=4(a^2+1)$

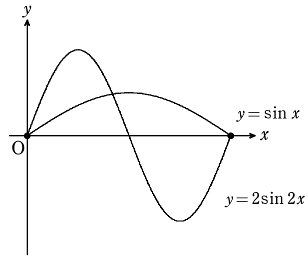
$$3a\left(a-\frac{4}{3}\right)=0 \qquad \text{ゆえに}\quad a=\frac{4}{3}$$

問題 $\boxed{3}$ は問題 $\boxed{1}$ と問題 $\boxed{2}$ の内容が理解できているかを確認させる意図と面積の 2 等分についての解説を考えて出題した。また，この単元では，授業中に生徒に問題を解かせ，その後，解説するスタイルをとった。最終問題を解説する際，すでに①と②の解説はその他の問題で終わっていたので，説明する事柄は③と④だけあった。最終問題で習得する知識が少なかったので，簡単に解説をすることができた。

問題 $\boxed{3}$

$0\leqq x\leqq\pi$ において，2 つの曲線 $y=\sin x$，$y=2\sin 2x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

【解 答】



………①

$\sin x=2\sin 2x$ とすると　$\sin x=4\sin x\cos x$　………⑤

よって　$\sin x(1-4\cos x)=0$　ゆえに　$\sin x=0$　または　$\cos x=\dfrac{1}{4}$

$0\leqq x\leqq\pi$ であるから　$x=0,\ \pi$　となり，

それ以外の交点の x座標を α とおき，$\cos\alpha=\dfrac{1}{4}$ とする。　………②

2 曲線の位置関係は，上図のようになるので，

$$S=\int_0^{\alpha}(2\sin 2x-\sin x)dx+\int_{\alpha}^{\pi}(\sin x-2\sin 2x)dx \quad \cdots\cdots⑥,\ ⑦$$

$$=\Big[-\cos 2x+\cos x\Big]_0^{\alpha}-\Big[-\cos x+\cos 2x\Big]_{\alpha}^{\pi}$$

$$=(-\cos 2\alpha+\cos\alpha)-(-1+1)+(1+1)-(-\cos\alpha+\cos 2\alpha)$$

$$=-2\cos 2\alpha+2\cos\alpha+2$$

$$=-2(2\cos^2\alpha-1)+2\cos\alpha+2$$

$$=-2\left(2\times\frac{1}{16}-1\right)+2\times\frac{1}{4}+2$$

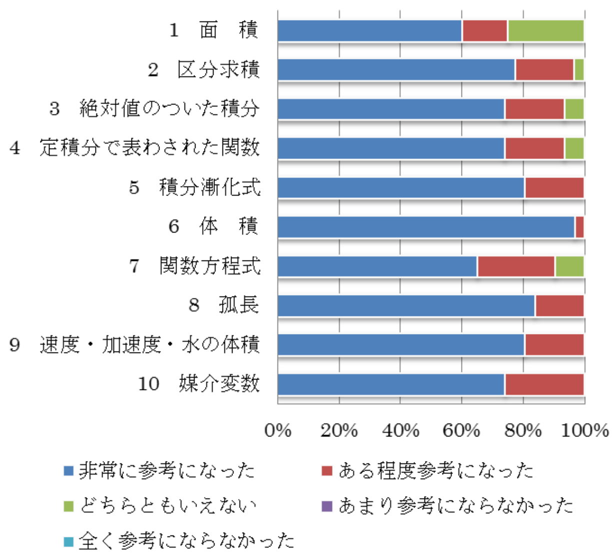
$$=\frac{17}{4}$$

5.3　授業の分析と考察

授業が全て終了した段階でアンケートを実施した。対象は担当した生徒 29 名。

5.3.1　分野別の評価について

● 以下の 10 分野の評価について当てはまる箇所に○をつけて下さい。



難易度の高い内容であったため，厳しい結果を予想していたのだが，予想に反してどの分野も生徒からは高評価であった。その理由として，本校理系の上位層だけを対象とした授業だったので，難易度の高い問題にも十分対応できたのだと考えられる。最も評価が高かった分野が“体積”の分野であった。体積の問題では，教科書レベルの内容である軸で回転させるものと，空間で表わされた回転体，不等式で表わされた立体の体積を扱った。

特に，空間で表わされた回転体の体積は模擬試験や大学入試の問題として扱われやすいが，教科書で扱われることはほとんどなく，この授業で初めて解説を聞く生徒が大半であった。それにも関わらず生徒の評価が高かったのは，対象生徒に基礎学力が身についていて，様々な数学の分野に対して興味関心が高かったというのは言うまでもないが，高難易度の問題であっても段階を踏んで指導していけば，生徒は十分理解できるからだと考える。

6　研究のまとめ

簡単な内容をかみ砕いて説明することは比較的容易にできるのではないかと思うが，国公立大学の２次試験などの問題を１時間の授業の中で合理的に説明するとなると，相当長い時間教材の研究をする必要がある。

また，問題のレベルと生徒の知識レベルが合致している場合は特に問題はないが，問題のレベルに生徒の学力が到達していない場合，教員が一方的に説明だけして授業が終わってしまうことが，実際の授業ではたびたび起こってしまうように思う。

しかし，今回のように生徒のレベルを考えて問題を設定し，段階を踏んで問題演習に取り組ませ，その解説をしていけば，対象となった生徒のアンケートを見る限りでは高難易度の問題であっても，好感触を得ることが出来る。

つまり，生徒自身の基本的な学力とやる気さえあれば，高難易度の問題を授業で扱うことになっても，教員側で段階的にレベルを上げて教えていけば，理解できるようになるのではないかと思う。