

数学 B ベクトル

～斜交座標を用いたイメージ化～

大分県立大分舞鶴高等学校 黒田裕一郎

1 はじめに

ベクトルの分野において「交点の位置ベクトル」までは、生徒もなんとか理解できるようであるが、ベクトル方程式に入ると生徒の理解は一気に落ちる。特に「条件を満たす点の動く範囲」は生徒にとってかなりハードルが高いようである。

そこで、『斜交座標』を導入し、とりあえず図示させることを目指してみた。図示ができ視覚的にイメージできれば、教科書にある文章による表現もできるのではと淡い期待もいだいた。

2 導入

(1) はじめに、直交座標において、「条件を満たす点の動く範囲」を図示させる〈例1〉。(2)～(4)の不等式の扱いに多少戸惑っていたものの、ほとんど生徒は図示できる。ただし、 $y = -x + 1$ と変形し直線をかくの、この機会に、 x 切片、 y 切片をとってかくことを指導しておいた。

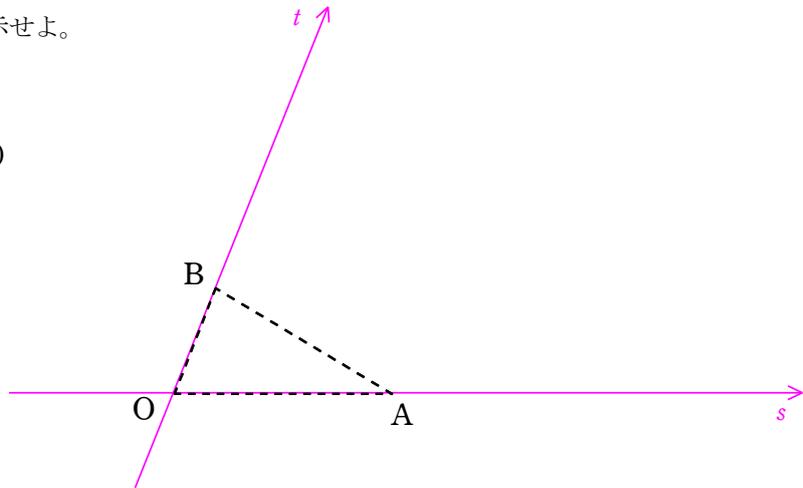
〈例1〉次の条件を満たす点 (x, y) の存在範囲を図示せよ。

- (1) $x + y = 1$
- (2) $x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0$
- (3) $0 \leq x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$
- (4) $0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3$

(2) 次に、直交座標と対比させて『斜交座標』を導入する〈例2〉。S軸は x 軸、t軸は y 軸に対応すること、 \overrightarrow{OA} \overrightarrow{OB} の大きさがそれぞれの軸の単位大きさになることを指導する。

<例2> $\triangle OAB$ がある. 実数 s, t が次の条件を満たしながら動くとき, 等式 $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ で表される点 P の存在範囲を図示せよ.

- (1) $s + t = 1$
- (2) $s + t = 1, s \geq 0, t \geq 0$
- (3) $0 \leq s + t \leq 1, s \geq 0, t \geq 0$
- (4) $0 \leq s \leq 2, 1 \leq t \leq 3$



3 練習

(1) 問題演習の際、問題文の末尾を「図示せよ」とする。なお、練習2 および神戸大学の問題は、習熟度に応じて扱った。

<練習1> $\triangle OAB$ において, 次の式を満たす点 P の存在範囲を図示せよ。

- (1) $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}, s + t = 2$
- (2) $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}, s + t = \frac{1}{2}, s \geq 0, t \geq 0$
- (3) $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}, 0 \leq s + t \leq 3, s \geq 0, t \geq 0$

<練習2> $\triangle OAB$ において, 次の式を満たす点 P の存在範囲を図示せよ。

- (1) $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + 2t\overrightarrow{OB}, s + t = 1, s \geq 0, t \geq 0$
- (2) $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}, 0 \leq 3s + 2t \leq 1, s \geq 0, t \geq 0$

(2) 大学入試問題

【2011 関西大】

$\triangle ABC$ において, $AB=6, AC=7, BC=8$ とする。このとき, s, t を実数とし, 点 P を $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ によって定める。 s, t が $s \geq 0, t \geq 0, \frac{1}{2} \leq s + t \leq 1$ を満たしながら変化するとき, 点 P が動く範囲の面積を求めよ。

【2000 神戸大】

$\triangle ABC$ において $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ とする.

(1) 実数 s, t が $0 \leq s+t \leq 1$, $s \geq 0$, $t \geq 0$ の範囲を動くとき, 次の条件 (a), (b) を満たす点 P の存在する範囲をそれぞれ図示せよ.

(a) $\overrightarrow{CP} = s\vec{a} + t(\vec{a} + \vec{b})$

(b) $\overrightarrow{CP} = (2s+t)\vec{a} + (s-t)\vec{b}$

(2) (1) の (a), (b) それぞれの場合に, 点 P の存在する範囲の面積は $\triangle ABC$ の面積の何倍か.

5 考察

生徒は斜交座標でのコツをつかむと、なんなく図示できるようになり、ある程度慣れてくると底辺を AB とした座標系でも抵抗なく図示できる。

また、大学入試問題にも積極的に取り組む姿勢がみられた。さらに、一部の生徒ではあるが教科書にある文章による表現にも興味をいただいていた。

『斜交座標』によるイメージ化の効果は大きく、改めて高校生にとって問題を視覚化することの重要性を感じた。