平成 24 年度　岩国高校理数科学習合宿

４乗数・５乗数の和の公式を作ってみよう
～階差数列の利用～

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 \qquad \sum_{k=1}^{n} k^5$$

理数科２年次(　　)番氏名(　　　　　　　　　　　)

１．はじめに

復習：これまでに，次のことを学習しています。

自然数の和の公式　$\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}\boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{n}+1)$ ……①

平方数（２乗数）の和の公式　$\sum_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+1)(2\boldsymbol{n}+1)$ ……②

立方数（３乗数）の和の公式　$\sum_{k=1}^{n} k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+1)\right\}^2$ ……③

①の「自然数の和」は，初項１，公差１，項数n の等差数列の和ですから，等差数列の和の公式を使えば簡単に求められます。あるいは，上段には１からn までの和，下段にはn から１までの和を置き，上下に並んだ数の和が一定の$n+1$，それがn 個あることからその和$n(n+1)$ の半分としても求められます。

それに比べて②，③はどうでしょう。②の「平方数の和」では恒等式$(k+1)^3-k^3=3\underline{k^2}+3k+1$が突如出現して，$k=1, 2, 3, \cdots, n$ を代入した式を上から書き並べ，総和をとって算出します。

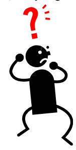
また，③の「立方数の和」では，同様に恒等式$(k+1)^4-k^4=4\underline{\boldsymbol{k^3}}+6k^2+4k+1$ に，$k=1, 2, 3, \cdots, n$ を代入した式を上から書き並べ，総和をとって算出します。

この考えを一般化すれば，二項定理により，恒等式

$$(k+1)^{m+1}-k^{m+1}={}_{m+1}\mathrm{C}_1k^m+{}_{m+1}\mathrm{C}_2k^{m-1}+\cdots+{}_{m+1}\mathrm{C}_mk+1=(m+1)\underline{\boldsymbol{k^m}}+\frac{(m+1)m}{2}k^{m-2}+\cdots+(m+1)k+1$$

が成り立つので，これから「m 乗数の和$\sum_{k=1}^{n} k^m=1^m+2^m+3^m+\cdots+n^m$」を求めることができます。

これは，確かに素晴らしい着眼ですが，これを少し違った視点から見ることもできます。



２．和を数列として

さて，ここで$\mathrm{S}_n(m)=\sum_{k=1}^{n} k^m$ とおきます。つまり，$\mathrm{S}_n(m)$ は$1^m=1$ からn^m までのm 乗数の和です。

$m=1$，2，3のとき，$\mathrm{S}_n(1)=\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\cdots+n$（**自然数の和**）

$\mathrm{S}_n(2)=\sum_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$（**平方数の和**）

$\mathrm{S}_n(3)=\sum_{k=1}^{n} k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$（**立方数の和**）です。

ここで，数列$\{\mathrm{S}_n(2)\}, \{\mathrm{S}_n(3)\}$ の<u>初項から第６項まで</u>を求めて，表１を完成してみましょう。

なお，$\{\mathrm{S}_n(1)\}$については，$\mathrm{S}_1(1)=1$，$\mathrm{S}_2(1)=1+2=3$，$\mathrm{S}_3(1)=1+2+3=6$，$\mathrm{S}_4(1)=1+2+3+4=10$，$\mathrm{S}_5(1)=1+2+3+4+5=15$，$\mathrm{S}_6(1)=1+2+3+4+5+6=21$　です。

$\{n\}$:	1,	2 ,	3 ,	4 ,	5 ,	6 ,	…
$\{\mathrm{S}_n(1)\}$:	1,	3 ,	6 ,	10 ,	15 ,	21 ,	…
$\{\mathrm{S}_n(2)\}$:	1,	$\square$,	$\square$,	$\square$,	$\square$,	$\square$,	…
$\{\mathrm{S}_n(3)\}$:	1,	$\square$,	$\square$,	$\square$,	$\square$,	$\square$,	…

表１

←うめてみよう

ここで，何か気付くことはありませんか。$\{\mathrm{S}_n(1)\}, \{\mathrm{S}_n(3)\}$ の間に何か **“関係”** はないでしょうか。表２を完成させてみましょう。

$\{\mathrm{S}_n(1)\}$:	1 ,	3 ,	6 ,	10 ,	15 ,	21 ,	…
$\{\mathrm{S}_n(3)\}$:	$\square^2$,	$\square^2$,	$\square^2$,	$\square^2$,	$\square^2$,	$\square^2$,	…

表２

←うめてみよう

これより，$S_n(3)=\{S_n(1)\}^2$ つまり(立方数の和)＝(自然数の和)^2 ということがわかります。

次に，表１で数列$\{S_n(1)\}$の上にある数列$\{n\}$で各項を割ってできる数列$\left\{\frac{S_n(1)}{n}\right\}$を考え，表３に初項から第６項まで書いてみましょう。

$\{n\}$ ：	1，	2，	3，	4，	5，	6，	…
$\{S_n(1)\}$ ：	1，	3，	6，	10，	15，	21，	…
$\left\{\frac{S_n(1)}{n}\right\}$ ：	$\square$，	$\square$，	$\square$，	$\square$，	$\square$，	$\square$，	…

表３

←うめてみよう

$\boxed{質問}$ 数列$\left\{\frac{S_n(1)}{n}\right\}$はどんな数列ですか？　また，その一般項を求めてみましょう。

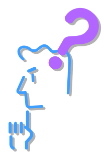
さらに，それから数列$\{S_n(1)\}$の一般項を求めてみましょう。

では，次にこのような方法で$\{S_n(2)\}$の一般項を求めてみましょう。今度は表１の２段目と３段目に着目して，今行ったように，下の各項を上の各項で割った数列を考えてみましょう。（表４）

$\{S_n(1)\}$ ：	1，	3，	6，	10，	15，	21，	…
$\{S_n(2)\}$ ：	1，	5，	14，	30，	55，	91，	…
$\left\{\frac{S_n(2)}{S_n(1)}\right\}$ ：	$\square$，	$\square$，	$\square$，	$\square$，	$\square$，	$\square$，	…

表４

←うめてみよう



$\boxed{質問}$ 数列$\left\{\frac{S_n(2)}{S_n(1)}\right\}$はどんな数列ですか？　また，その一般項を求めてみましょう。

さらに，それから数列$\{S_n(2)\}$の一般項を求めてみましょう。

３． ４乗数の和Ｓₙ（４）と５乗数の和Ｓₙ（５）を求めよう

では，表１をさらに拡張してみましょう。（表５）

$\{n\}$	:	1	2	3	4	5	6	⋯
$\{\mathrm{S}_n(1)\}$	:	1	3	6	10	15	21	⋯
$\{\mathrm{S}_n(2)\}$	:	1	5	14	30	55	91	⋯
$\{\mathrm{S}_n(3)\}$	:							⋯
$\{\mathrm{S}_n(4)\}$	:							⋯
$\{\mathrm{S}_n(5)\}$	:							⋯

表５

←うめてみよう

ここで，① $\mathrm{S}_n(2)$と$\mathrm{S}_n(4)$，② $\mathrm{S}_n(3)$と$\mathrm{S}_n(5)$ の組合せを考えて，表４のようにそれぞれの３段目に上の数列の各項で下の数列の各項を割った数列 $\left\{\dfrac{\mathrm{S}_n(4)}{\mathrm{S}_n(2)}\right\}, \left\{\dfrac{\mathrm{S}_n(5)}{\mathrm{S}_n(3)}\right\}$ の初項から第６項までを書き込んでみましょう。（表６，７）

$\{\mathrm{S}_n(2)\}$:	1	5	14	30	55	91	⋯
$\{\mathrm{S}_n(4)\}$:							⋯
$\left\{\dfrac{\mathrm{S}_n(4)}{\mathrm{S}_n(2)}\right\}$:							⋯

表６

←うめてみよう

$\{\mathrm{S}_n(3)\}$	:							⋯
$\{\mathrm{S}_n(5)\}$	:							⋯
$\left\{\dfrac{\mathrm{S}_n(5)}{\mathrm{S}_n(3)}\right\}$	:							⋯

表７

←うめてみよう

次に，数列$\left\{\dfrac{\mathrm{S}_n(4)}{\mathrm{S}_n(2)}\right\}, \left\{\dfrac{\mathrm{S}_n(5)}{\mathrm{S}_n(3)}\right\}$ の**階差数列**をとってみよう。それぞれ$\{\mathrm{T}_n(2,4)\}, \{\mathrm{T}_n(3,5)\}$ として，表８に初項から第５項まで書き込んでみよう。

$\{\mathrm{T}_n(2,4)\}$:						⋯
$\{\mathrm{T}_n(3,5)\}$:						⋯

表８

←うめてみよう

$\{\mathrm{T}_n(2,4)\}$ は初項 □ ，公差 □ の等差数列であるから，$\mathrm{T}_n(2,4)=$ □

よって，$n \geqq 2$ のとき，$\dfrac{\mathrm{S}_n(4)}{\mathrm{S}_n(2)}=$ □

これは$n=1$ のときにもなりたつので，$\dfrac{\mathrm{S}_n(4)}{\mathrm{S}_n(2)}=$ □ です。

したがって，$\mathrm{S}_n(4)=$ □ $\mathrm{S}_n(2)$ □

定数　　　　　nの式

$=$ □ ←$\mathrm{S}_n(2)$は求めています

$=$ □

$\{\mathrm{T}_n(3,5)\}$ は初項 □ ，公差 □ の等差数列ですから，$\mathrm{T}_n(3,5)=$ □ です。

よって，$n \geqq 2$ のとき，$\dfrac{\mathrm{S}_n(5)}{\mathrm{S}_n(3)}=$ □

これは$n=1$ のときにもなりたつので，$\dfrac{\mathrm{S}_n(5)}{\mathrm{S}_n(3)}=$ □ です。

したがって，$\mathrm{S}_n(5)=$ □ $\mathrm{S}_n(3)$ □ ……（＊）です。

定数　　　　　nの式

$\mathrm{S}_n(3)$ については，$\mathrm{S}_n(3)=\{\mathrm{S}_n(1)\}^2=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ であることは既に知っていますが，

$\left\{\dfrac{\mathrm{S}_n(3)}{\mathrm{S}_n(1)}\right\}$: □，□，□，□，□，□，… の階差数列$\{\mathrm{T}_n(1,3)\}$ が，

$\{\mathrm{T}_n(1,3)\}$: □，□，□，□，□，… であることから，$\mathrm{T}_n(1,3)=$ □ です。

よって，$n \geqq 2$ のとき，$\dfrac{\mathrm{S}_n(3)}{\mathrm{S}_n(1)}=$ □ です。

これは$n=1$ のときにもなりたつので，$\dfrac{\mathrm{S}_n(3)}{\mathrm{S}_n(1)}=$ □ です。

したがって，$\mathrm{S}_n(3)=$ □ $\mathrm{S}_n(1)$ □ $=$ □ です。

すると，（＊）より $\mathrm{S}_n(5)=$ □ $\mathrm{S}_n(3)$ □ $=$ □

となります。

４． まとめ

$S_n(4)=\sum_{k=1}^{n}k^4=1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=$ $\boxed{}$ （４乗数の和の公式）

$S_n(5)=\sum_{k=1}^{n}k^5=1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5=$ $\boxed{}$ （５乗数の和の公式）

【感想】

２年次　１組　（　　　）番　氏名（　　　　　　　　　　　　　　）

◆生徒のようす

前回の実践では計算に案外時間が必要であったことを反省し，ゆとりを持って計算させた。また，パワーポイントでその結果を逐一確認させて，本題の数列の和の一般項を求めさせた。

階差数列からもとの数列の一般項を求める方法を持参させた教科書で確認しながら，机間巡視をして正解を得ている生徒にはそのことを伝え，計算ミスをしている生徒にはどこが間違いであるかを指摘して再計算させた。一気に最後までできる生徒もいればサポートの必要な生徒もいたが，一生懸命取り組んでいた。

この講座が終わってから数名の生徒が来て，一般にm乗数の和を求めたら，mが偶数のときは因数として$n,(n+1),(2n+1)$とnの２次式の積，mが奇数のときは$n,(n+1)$と２次式の積になるのかという質問を受けた。また，このような授業形態は楽しく学べるので日頃の授業でもしてもらえないかという要望も受けたので，今後の課題とした。