授業実践記録（数学）

図形問題における解法の特徴と選択

岡山白陵高等学校　三木雅弘

１．ねらい

単元別に授業を進めるとき，どうしても先入観をもって問題を見る癖がついています。基礎基本が重要ということに何の異論もないのですが，基本重視といっても，果たして基礎力がついた後に応用力をつけることが可能でしょうか。頭が固くなってから，それをほぐすのは簡単ではありません。そこで，適宜，解法の選択を視野に入れた指導が必要ではないでしょうか。

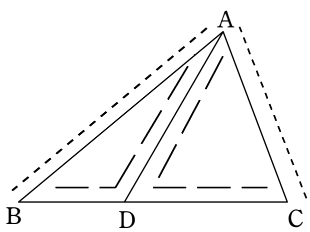
２．テーマ問題

△ＡＢＣが辺ＢＣ上に点Ｄがあり，
等式$AB^2+AC^2=2AD^2+BD^2+CD^2$が成り立っている。点Ｄはどのような点か。
〔この問題が『平面ベクトル』の授業中の演習問題であることに注意して下さい。〕

３．授業展開

(１)図を描いて，座標設定の方法
『平面ベクトルの図形への応用』の演習の続きであったので，案の定，生徒達の予習はベクトルを用いています。ノートに『題意の図』が描けていない者が多数。そこから始めました。

図の中に，左辺に現れる線分，右辺に現れる線分の区別がつくように描いてみれば，ほとんどの者が『中線定理』と気付いてくれました。ならば，どんな方法が考えられるか？



『図形と方程式』の段階で『座標系の威力』に対する認識はかなり定着しているらしく。「座標を入れて解く」と答える生徒も多く，『座標の入れ方の工夫』に進む。先入観が消えると意外とスムーズ。

Ｄを原点，Ｃをx軸の正の部分にとることは自然と考えているようで一安心。
そこで，一般性を失わず，文字数を節約する話へ。生徒に設定させると，一部誘導して，『$B(-b,0),C(c,0),A(p,q),b>0,c>0,q>0,p$は任意の実数』にたどり着き，座標の入れ方の復習が出来た。$p(b-c)=0$から，点Ｄは辺ＢＣの中点，またはＡから辺ＢＣ(またはその延長)に下ろした垂線の足。計算は生徒にも簡単で，すぐ終了。

(２)初等幾何的な発想で

次に,『中線定理』はどのように証明したか？残念ながら，三平方の定理の応用と即答できない。「定理は使うもの」「数学は”答え”を求めるもの」との捉え方がここにも見える。

まずは，黒板に描いた三角形をそのまま使って，ＡからＢＣに垂線ＡＨを下ろし，三平方の定理を３回使って，証明すべき等式を簡単にしてみせる。これは容易。

$\mathrm{BH}^2+\mathrm{CH}^2=2\mathrm{DH}^2+\mathrm{BD}^2+\mathrm{DC}^2$　に至って「どう読むか？」を尋ねる。

すべて「直線ＢＣ上の長さ」になったこと(一次元化？)，それに加え，Ｈの位置は線分ＤＣ上にあるとは限らないことを知らせ，その解決策を考えさせる。

例えば。Ｂを原点，Ｃを単位点とする数直線を考えて，Ｄの座標を a，Ｈの座標を $a+b$ とおく。ここで $0<a<1$, b は実数とすると，Ｈの位置による場合分けを回避したことになる。

必ずしも数直線を導入する必要はなく，符号付きの長さを考えればよいことは，ベクトルの実数倍の学習後なので，思いつくのは難しいが，受け入れ易いようだった。

ここでも，$b(2a-1)=0$ が導かれ，$b=0$ からＤは垂線の足，$a=\dfrac{1}{2}$ からＤは辺ＢＣの中点

(３)いわゆる『三角比』では？

「補角」の概念については，十分気をつけて指導してきたのだが，∠ＡＤＣと∠ＡＤＢが補角をなすから，これを利用して……という発想は，やや難しいようだ。これも説明すれば理解は速いが，自分で見つけられない。

$\angle\mathrm{ADB}=\theta$ とおくと，$\angle\mathrm{ADC}=\pi-\theta$　だから

△ＡＢＤにおいて　$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{BD}^2-2\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BD}\cos\theta$

△ＡＤＣにおいて　$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{CD}^2+2\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CD}\cos\theta$

この辺々を加えることによって，条件は……

$\mathrm{AD}\cos\theta(\mathrm{BD}-\mathrm{CD})=0$

$\mathrm{AD}\neq 0$ だから　$\cos\theta=0$ または $\mathrm{BD}=\mathrm{CD}$

よって，$0<\theta<\pi$ より　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ または$\mathrm{BD}=\mathrm{CD}$

(４)ベクトルでは？〔生徒にとってはここからが本番か？〕

予習の段階である程度出来ている者の多くは『$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ 』を基底として，「Ｄは線分ＢＣを $t:(1-t)$に内分する点」とおいていた。十分予想されることであるが，数名を除いて結論までに至っていない。多くの生徒の筋道に従ってみせることにする。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{c}$ とおくと，計算の後に，(途中で挫折している者が多数)

$(2t-1)\left\{(t-1)\left|\overrightarrow{b}\right|^2-(2t-1)\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+t\left|\overrightarrow{c}\right|^2\right\}=0$ に至るのだが，ここから，

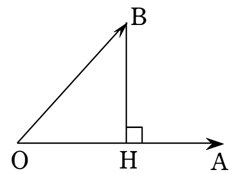
$(2t-1)\left(-\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right)\cdot\left\{(1-t)\overrightarrow{b}+t\overrightarrow{c}\right\}=0\cdots①$ への変形が難しいので，一旦ここで止めておいて。

話を一旦切り替える。『基底』の取り方について考えさせて見た。ここまでの解法の色々を参考にすれば，「Ｄを始点にとる」という発想は，自然に出て来た〔と仕向けたのだが〕。
すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{DA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ を基底にとる。

$\overrightarrow{\mathrm{DA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{DB}} = \vec{b}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{DC}} = k\vec{b}$ と表せて（これもある意味”１次元化”？）
条件は，（これは容易！）……，$(k+1)\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ となり，非常に簡単に２つの場合が得られる！
比較すれば，「ベクトル」ならこれがよい！という結論か？でも前もって分かるだろうか？

ここまで，如何に無理なく誘導し，基底の取り方だけの問題ではなく，数直線や符号付きの長さも同じ類の考え方であることを俯瞰させるのが主題であった。ここでまとめに入る予定であったのだが，思わぬ躓きが露わになり，想定外のものも加わることになってしまった。

(５)正射影ベクトルの考え方〔付加的内容と断って〕



既習事項の「線分ＯＢの直線ＯＡ上への正射影」から

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\angle\mathrm{AOB}$$

$$= \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OH}$$

次に，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \mathrm{OH}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|} = \left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

これを $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の(直線)ＯＡ上への正射影ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ という。

$\mathrm{OH} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は「符号付きの長さ(大きさ)」を，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|}$ は「向き」を表し，

$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|}$ は大きさ１だから，２つ掛けても”大きさは変わらず”ＯＨの部分だけで決まる。

さて，これを元にして，

t の方程式①を解くと現れる $t = \dfrac{1}{2}$ 以外の $t = \dfrac{\vec{b}\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)}{\left|\vec{b}-\vec{c}\right|^2}$ について

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{b} + \frac{\vec{b}\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)}{\left|\vec{b}-\vec{c}\right|^2}\left(-\vec{b}+\vec{c}\right) = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \left(\vec{b}\cdot\frac{\vec{b}-\vec{c}}{\left|\vec{b}-\vec{c}\right|}\right)\frac{-\vec{b}+\vec{c}}{\left|-\vec{b}+\vec{c}\right|}$$

ここで，$\vec{e} = \dfrac{-\vec{b}+\vec{c}}{\left|-\vec{b}+\vec{c}\right|}$ は $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ 方向の単位ベクトルで，「正射影ベクトル」が現れる。

$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \left(-\vec{b}\cdot\vec{e}\right)\cdot\vec{e} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BH}}$　よって　ＤはＡからＢＣに下ろした垂線の足。

(６)授業のまとめ

「問題の設定をしっかり読み取る」こと。その際,「図を描いてみる」,「どうなりそうか，ちょっと計算してみる」ことが重要。ここで,『何を問われているか』を忘れがち。謂わば,『仮定と結論』を”両睨み”して，その繋がりを如何にしてつけるのか？が最も重要。それには，基本的な考え方や公式，定理の意味や使い方にも，普段から気を配ること。

４．終わりに〔反省と展望〕

この授業は高校１年生の３月の終わりに 70 分で行ったもので, このような分野をまたぐような解法の選択まで考えさせることは，時間的に難しい。

生徒の反応によっては，思わぬ方向に授業内容が発展していく恐れもあるので，面白くもあり，また危険でもある。

最初にも述べたように，本当の基礎力は，その基礎の意味が納得できたところにしか生まれない。その為にはこのような，ある意味では「刺激策」の授業も必要かと思います。

多くの方のご意見，ご批判をお待ちします。