公式を「使う」から「導く」へ

新潟県立村上中等教育学校　　高橋　昌樹

1. はじめに

2013年の大阪大学文系で次のような問題が出題された。

xy 平面において、点$P(x_1, y_1)$ と直線 l： $ax+by+c=0$ の距離は、

$\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である。これを証明せよ。

この点と直線の距離の公式を導く問題は、まさに受験生にとって「寝耳に水」の問題であったと思われる。これは受験勉強において公式に対し本質的な理解をせず「覚えて使う」ことに終始しがちなことへの大学側からの警鐘のような気がしてならない。このような公式を導かせる問題は

正弦•余弦の加法定理　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$　（1999　東京大学）

3倍角の公式　$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$　（2005　熊本大学　文系）

正弦定理　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$　（2008　佐賀大学　文系、2010　大分大学）

和積の公式　$\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$　（2008　埼玉大学）

正弦と余弦の加法定理を用いて $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$　（2009　岩手大学）

三角関数の極限　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　（2013　大阪大学　理系）

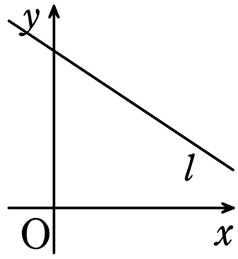
など多数出題されている。そこで今回、生徒がどの程度公式を自力で導くことができるのか、導けない場合にどの程度ヒントを与えたら導けるかを調査し、考察してみた。尚、ヒントについては教科書に載っている最も一般的な証明の仕方に従って適宜小刻みに出したものである。

2. 内容その１

xy 平面において、点$P(x_1, y_1)$ と直線 l： $ax+by+c=0$ の距離は、

$\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である。これを証明せよ。　（2013年　大阪大学　文系）

　この問題を3月上旬の学年末考査終了後の授業で本校4年生（高1）の一部に実際に解かせてみた。
　習ったのはまだ1か月前にもかかわらず最初から手が動いたのはわずか数名（覚悟はしていたが…）。
　そこで、以下のようにヒントを少しずつ出し、どの段階で証明できたかを調べた。



ヒント①　まず、原点Oと、直線 l : $ax+by+c=0$ との距離を求める。
　　Oから l に垂線OH を下ろすとき、OH の方程式は？
ヒント②　l とOH の交点 H の座標は？
ヒント③　O と l との距離 OH の長さは？
ヒント④　いよいよ本題。点P(x_1, y_1) と直線 l : $ax+by+c=0$ の距離を求める。点P と直線 l を点P が原点に移るように平行移動すると、直線 l の方程式はどう変わるか？
ヒント⑤　ヒント③で出したものと照らし合わせてみてください。証明できそうですか？

実際にどの段階で書けたかの割合は以下の通りである。

ヒントなし	ヒント①	ヒント②	ヒント③	ヒント④	ヒント⑤	分からない
5%	5%	0%	5%	15%	55%	15%

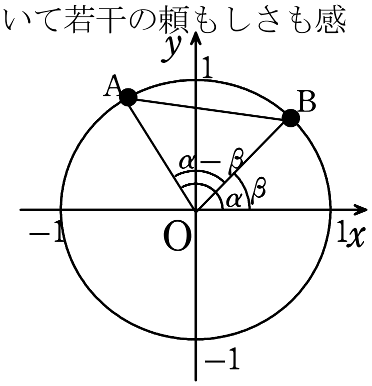
　学年末考査で、この公式を使って距離を出す問題を出題して正答率もそれなりに高かったが、公式を導くとなるとここまで書けないのかというのが率直な感想である。ヒント①で手は動いたが、OH の長さを求めたところでストップしてしまう生徒も何人かいた。二次関数における平行移動の知識がついていないものと思われる。また、具体的な数字で与えられると解けるのに文字になると急に解けなくなる生徒も多い。この問題に限ったことではないが、文字式に苦手意識を持つ生徒が多いことが改めて分かった。

3. 内容その２

一般角 α, β に対して、$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$　を証明せよ。（1999　東京大学）

　この問題は同じく3月上旬に5年生（高2）の理系クラスに解かせてみた。ただ、取り組みやすいように最初に余弦を示してから正弦を示すようにと伝え、右下の図はあらかじめ与えた。習ったのは昨年の5月。案の定、最初から書ける生徒はほとんどいなかったが、理系クラスということもありスラスラ

書く生徒やこちらが想定した以外の解答（後ほど紹介します）を書く生徒もいて若干の頼もしさも感じた。



また、私の示した図だとまず $\cos(\alpha-\beta)$ を求めることになるため、戸惑った生徒がいたことも事実である。反省点である。

出したヒントは以下の通り。

まず、余弦の証明。

ヒント①　右図において、点A, Bの座標は？

ヒント②　AB^2 の長さを2通りで表そう。

- 距離の公式で（三平方の定理だ！）
- △OABに余弦定理を用いて

結果は以下の通り。

ヒントなし	ヒント①	ヒント②	分からない
3%	12%	65%	20%

図を見た段階で、まずA, B の座標を設定することはできるかと思ったが、そこまでいけない生徒も多かった。ここさえクリアーできればヒント②の段階で8割の生徒が余弦の証明はできた。最初の一歩が書けないのは証明となると何も考えず毛嫌いしてしまう傾向にあるのではないか。

次に、正弦の証明

ヒント①　上で証明した　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$　において

βを$-\beta$ でおきかえると…

ヒント②　証明したい式の左辺は sin　だ。cos $\rightarrow$ sin　に変えるにはどうすればいい？

結果は以下の通り。

ヒントなし	ヒント①	ヒント②	分からない
6%	0%	53%	41%

余弦の証明ができても、こちらは手が出ないという生徒が多い。図形的な知識は一切必要なく、三角関数で必ず出てくる公式　$\sin(-\theta)=\sin\theta,\ \cos(-\theta)=-\cos\theta$ や、$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ を使えば自然にできるのだがこれらの公式が定着されていないものと思われる。公式は知っていてもここで必要になるということに気付かない可能性もある。

また、ヒントなしで書けた生徒の中には

○正弦において、△OAB の面積を2通りで求めて導いたもの。

$$\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}|\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta|$$ より導く。

○オイラーの公式　$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を使って、実部と虚部を比較して2つ同時に導いているもの（東大入試の解答としては不十分であるが）

もあった。理系クラスとして今後が楽しみである。

4. 終わりに

生徒からよく「数学って公式覚えてればなんとかなるでしょ…」と言われることがある。特に数学を嫌いまたは苦手とする生徒に多い。数学の教員としては何とも言い難い。確かに公式を覚えていないと解けない問題が多いのは事実であり、点数を取る、取らせるためには、「導く」ことより「実際に使って慣れる」ことに時間をかけてしまうのが本音である。このような公式を「導く」入試問題は先述のように、高校数学に対する大学側からのメッセージなのかとも思う。

今回「点と直線の距離」「加法定理」の公式を通して、生徒の公式を導く力を調べてみたが、改めて使えても作れないということがよく分かった。授業でもその公式を使うときに、その都度簡単でいいから導き方をこまめに話していくべきと強く思った。私自身、今後の検討課題であるし、皆様からの御意見を頂戴できたらと思う。