平成２４年度理数科課題研究

２　年　次　理　数　科

探究数学

「整数探究」

～大学入試問題から見た整数探究～

平成２４年7月３１日(火)
８：45～１１：45
１３：00～１６：00

岩国高校　会議室

日　　程

事前説明	８：４５～９：００
講　義①	９：００～１０：１５(７５分)
休 憩	
講　義②	１０：３０～１１：４５(７５分)
昼　食	
問題演習①	１３：００～１４：１５(７５分)
休 憩	
問題演習②	１４：３０～１５：４５(７５分)
後片付け	１５：４５～１６：００

班 分 け

班	メンバー				
A	1	2	3	4	5
B	6	7	8	9	10
C	11	12	13	14	15
D	16	17	18	19	20
E	21	22	23	24	25
F	26	27	28	29	30
G	31	32	33	34	35
H	36	37	38	39	40

座　席

プロジェクター

1　2	11　12　13	21　22　23	31　32
A班	C班	E班	G班
3　4　5	14　15	24　25	33　34　35
6　7　8	16　17	26　27　28	36　37
B班	D班	F班	H班
9　10	18　19　20	29　30	38　39　40

整数探究

はじめに

『整数』とは，つまり…，－3，－2，－1，0，1，2，3，…ですが，それは「整数論」という数学の一大分野を形成しています。350 年間解決されなかった「**フェルマーの問題**」（最終定理とか大定理とも呼ばれています。n を３以上の整数とするとき，$x^n+y^n=z^n$ は整数の解$(x,y,z)\fallingdotseq(0,0,0)$ をもたないというもので，１７年前にワイルズが解決しました）も（整）数論に含まれています。
さて，整数の計算はできても，整数の本質を問うような問題になれば，それなりの知識や経験が必要です。
大学入試問題でも整数に関わる問題が出題されます。「全国大学入試問題正解（旺文社）」での内容別問題一覧では，整数問題は数学Ⅰに分類されています。「えっ，数学Ⅰのどこで整数を扱ったの？」と疑問に思う人もいるでしょう。実は，第１章の数と式で扱ったことになっています。そこでは，整数について，「自然数とこれらに負の符号をつけた数と０を合わせた数…，－3，－2，－1，0，1，2，3，…を整数という。」という形で扱われています。たったこれだけです。
次のような２つの数とその最大公約数，最小公倍数についての基礎・基本的な性質

a, b を自然数(＝正の整数)，g, l をその最大公約数，最小公倍数とするとき，
$a=a'g, b=b'g$ （a'とb'は互いに素)，$l=a'b'g, ab=gl$

でさえ扱っていません。以前は中学校で，**G。C。M。**（Greatest Common Measure（最大公約数）），**L。C。M。**（Least Common Multiple)という記号を使って，最大公約数，最小公倍数をしっかりやった記憶がありますが，今はこの記号さえ見かけなくなりました。それどころか，最大公約数，最小公倍数さえ発展的な扱いです。これでも大学入試では，整数を学習したことにして，予備知識のない受験生に整数の問題を出しますので，それなりの対応策なしでは大学入試レベルの整数問題を解くことは大変です。教科書で整数の説明（定義）があっても それに関する重要な性質についての知識がないからです。
　そこで，この整数探究で，大学入試問題を通じて，整数についてのより深い知識や理解を得て，整数問題の解き方や証明方法について学習していきましょう。

どんな問題が出題されているの？

整数問題を平成２３年２，３月の２次試験で出題した国公立大学は，北から，岩手大，群馬大，東大，一橋大，静岡大，和歌山大，島根大，熊本大，鹿児島大，和歌山県立医大，防衛医大です。
私立大は，青山学院大，慶応大，上智大，　東洋大，帝京大，中央大，明治大，早稲田大，愛知工大，立命館大，大阪工大，兵庫医大，広島工大です。また，センター試験（本試）でも出題されています。
　京大では，≪**p を素数，n を正の整数とするとき，$(p^n)!$ はp で何回割り切れるか。**≫　名大では，≪**x, y を正の整数とする。(1)　$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ を満たす組(x,y) をすべて求めよ。(2) p を３以上の素数とする。$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{p}$ を満たす組(x,y) のうち，$2x+3y$ を最小にする (x,y) を求めよ。**≫　山大では，≪**m を自然数とするとき，(1) m^2 を５で割ったときの余りは，０，１，４のいずれかであることを証明せよ。(2) m^2 が５の倍数ならば，m は５の倍数であることを証明せよ。(3) $\sqrt{5}$ が無理数であることを証明せよ。**≫という問題が出題されています。
　手の届きそうな問題もあれば，方針の立てづらい問題もあると思います。山大の問題は，数学Ａでやったこと（背理法）に関連があることに気付くはずですが，京大の問題はどうでしょうか？これも数学Ａで「！（階乗）」は学習していますが，どのように攻略したらいいのでしょう？　現時点では，使える**道具（ツール：tool）**が余りにも不足しています。では，ツールを増やしていきましょう。

ツールを増やそう！

ここで，整数問題を解くにあたって，重要なツールを２０個ほど挙げます。

ツール１　素数・素因数分解
ツール２　最大公約数・最小公倍数
ツール３　互いに素
ツール４　約数の個数・和
ツール５　合同式
ツール６　倍数の判定法
ツール７　$2n, 2n+1$；$3n, 3n\pm1$；$5n, 5n\pm1, 5n\pm2$
ツール８　(整数(式))×(整数(式))＝(整数) の解き方
ツール９　分数方程式の整数解
ツール１０　連続する整数の積
ツール１１　$\sqrt{\quad}$ と平方数……整数解をもつ２次方程式
ツール１２　ガウス記号$[x]$：xを超えない最大整数
ツール１３　二項定理
ツール１４　背理法
ツール１５　不定方程式$ax=by$ (a, bは自然数) の解
ツール１６　不定方程式$ax+by=c$ (a, b, cは0でない整数) の解
ツール１７　p 進法(p 進記数法)
ツール１８　領域内の整数（格子点）
ツール１９　整数解をもつ２次方程式の決定
ツール２０　整除

では，それぞれのツールについて，説明します。

ツール１　素数・素因数分解

『自然数p が**素数**⟺１と自分自身のp だけで割り切れる』です。なお，１は素数ではありません。また，素数でない自然数を**合成数**といいます。

例　2, 3, 5, 7 は素数，4, 6, 8, 9 は合成数です。

言葉通り，素数は数の素(もと)で，自然数は素数の積として一通りに表せます。

これを**素因数分解の一意性**といいます。

【使用例】自然数n を素因数分解して，$n=2^a\cdot3^b\cdot5^c\cdots(a, b, c$は0以上の整数$)$ と表すと，…

　他には，①１より大きい整数は少なくとも１つの素数の約数をもつ，②自然数がその正の平方根以下の素数で割り切れなければ素数である，③素数は無限に存在するという重要な性質があります。

　③は背理法で簡単に証明できます。

ツール２　最大公約数・最小公倍数

　２つ以上の自然数について，共通の約数の中で最大のものを**最大公約数**，共通の倍数の中で最小のものを**最小公倍数**といいます。

【重要な性質】２つの自然数a, b において，G, L をそれぞれ最大公約数，最小公倍数とするとき，

1. $a=a'\mathrm{G}, b=b'\mathrm{G}$ （a',b'**は互いに素**）
2. $\mathrm{L}=ab'=a'b=a'b'\mathrm{G}$
3. $ab=\mathrm{GL}$

例
1. $6=3\times\mathbf{2}, 10=5\times\mathbf{2}$ （3と5は互いに素）
2. $30=6\times5=3\times10=3\times5\times\mathbf{2}$
3. $6\times10=\mathbf{2}\times30$

自然数a, b の最大公約数は$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$，最小公倍数は$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ で表します。

例　$6=2\times3, 10=2\times5$ ですから，$(6, 10)=2, [6, 10]=30(=2\cdot3\cdot5)$ です。

最大公約数，最小公倍数について，重要な性質を挙げると，

①a, b を任意の自然数とすると，$a=bq+r\ (0\leqq r<b)$ と一意的に表せます。(q を，a をb で割ったときの商，r を余りといいます)

②$a, b, c, \cdots$ の公約数は，$a, b, c, \cdots$ の最大公約数の約数です。

③$a, b, c, \cdots$ の公倍数は，$a, b, c, \cdots$ の最小公倍数の倍数です。

ツール３　互いに素

２つ以上の自然数において，最大公約数が１のとき，それらは**互いに素**といいます。

素数同士は互いに素である。６，３５はともに素数ではない$(6=2\cdot3, 35=5\cdot7)$のですが，互いに素です。

「互いに素数ではない」ではありません。

$\sqrt{2}$ が無理数であることを背理法で証明するとき，$\sqrt{2}$ が無理数でない，すなわち$\sqrt{2}$ が有理数としたとき，$\sqrt{2}=\dfrac{a}{b}$ （a, b は互いに素）として，矛盾を導きます。

ツール４　約数の個数・和

自然数n を素因数分解して，$\boldsymbol{n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}\cdots p_n^{a_n}}$ （$\boldsymbol{p_i}$**は素数，**$\boldsymbol{a_i}$**は正の整数**）と表すとき，

n の**約数の個数**は，$(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)\cdots\cdots(a_n+1)$ 個で，（数学A）

n の**約数の和**は，$(1+p_1+\cdots+p_1^{a_1})(1+p_2+\cdots+p_2^{a_2})(1+p_3+\cdots+p_3^{a_3})\cdots\cdots(1+p_n+\cdots+p_n^{a_n})$ です。

したがって，等比数列の和の公式（数学B）から，

n の約数の和は$\dfrac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\dfrac{p_2^{a_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\dfrac{p_3^{a_3+1}-1}{p_3-1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{p_n^{a_n+1}-1}{p_n-1}$ です。

自然数n において，「n より小さい約数すべて（１を含む）の和がn に等しい」とき，あるいは，「すべての約数の和がn の２倍である」とき，n を「**完全数**」といいます。

たとえば，28 は 28 より小さいすべての約数の和は$1+2+4+7+14=28$，あるいは，

$(1+2+2^2)(1+7)=7\times8=2\times28$ ですから完全数です。

完全数は他には，496, 8128, ……などがあります。

ツール５　合同式

自然数a, b を自然数n で割ったときの余りが等しいとき，$\boldsymbol{a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ \ n)}$ と表します。

mod は modulo（法（割る数））で，「$\boldsymbol{a}$ **と**$\boldsymbol{b}$ **は**$\boldsymbol{n}$ **を法（割る数）として合同**」と読みます。

たとえば，$25=7\times3+4, 46=7\times6+4$ ですから，$25\equiv46\ (\mathrm{mod}\ \ 7)$ です。また，

$12345=7\times1763+4$ ですから，$12345\equiv4\ (\mathrm{mod}\ \ 7)$ です。

余りに関する問題には威力を発揮します。

合同式においては，次のことが成り立ちます。まるで等号「＝」のような性質をもっています。

ただし，除法（割算）は注意が必要です。

合同式の性質

$a\equiv b \pmod{n}$, $c\equiv d \pmod{n}$ のとき,

1。 $a+c\equiv b+d \pmod{n}$　加法

2。 $a-c\equiv b-d \pmod{n}$　減法

3。 $ac\equiv bd \pmod{n}$　乗法

4。 $a^k\equiv b^k \pmod{n}$, **(kは自然数)**　累乗

5。 $ac\equiv bc \pmod{n}$ **のとき，<u>c とn の最大公約数をg</u> とすると,** $a\equiv b \left(\bmod\ \dfrac{n}{g}\right)$

特に， $ac\equiv bc \pmod{n}$ **のとき，<u>c とn が互いに素</u>ならば,** $a\equiv b \pmod{n}$　除法

$8\equiv 15 \pmod{7}$, $9\equiv 16 \pmod{7}$ であるから，$8+9\equiv 15+16 \pmod{7}$ です。
これは，$17\equiv 31 \pmod{7}$ ということです。これは，８日と１５日は曜日が同じで，９日と１６日も曜日が同じだから，１７日と３１日の曜日が同じといっているのと同じことです。

以前，本校がＳＳＨ(スーパーサイエンスハイスクール)に指定されていたとき，この合同式を当時の理数科１年次生に学習させました。そこでは，「5^{999999} を７で割った余りはいくつか」という問題をフェルマーの小定理と合同式を使って考察しました。

入試問題　「2^n を７で割ると１余る」という性質をもつ最小の自然数n は［　　］である。
したがって，2^{12} を７で割った余りは［　　］，2^{2009} を７で割った余りは［　　］である。【日本医大】

解　$2^1=2, 2^2=4, 2^3=8\equiv 1 \pmod{7}$ であるから，2^n を７で割ると１余る」という性質をもつ最小の自然数n は$\boxed{3}$である。$2^3\equiv 1 \pmod{7}$ より，$2^{12}=2^{3\times 4}=(2^3)^4\equiv 1^4=1 \pmod{7}$
したがって，2^{12} を７で割った余りは$\boxed{1}$，$2009=12\times 167+5$ であるから,
$2^{2009}=2^{12\times 167+5}=(2^{12})^{167}\cdot 2^5=(2^{12})^{167}\cdot 2^3\cdot 2^2\equiv 1^{167}\cdot 1\cdot 4=4 \pmod{7}$　よって，2^{2009} を７で割った余りは,
$\boxed{4}$ である。

ツール６　倍数の判定法

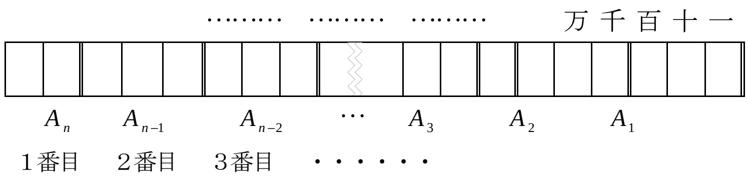
「２３４」のように，各位の数を足して３の倍数になれば，その数自体も３の倍数です。
2(百の位)+3(十の位)+4(一の位)＝9＝3×3(3の倍数)で ,234＝3×78(3の倍数)です。
これは，次のように公式化できます。

(ⅰ) **Nが３の倍数⟺Nの「各位の数の和」が３の倍数**

他には,

(ⅱ) **Nが４の倍数⟺Nの「下２桁」が４の倍数**

(ⅲ) Nが７の倍数⟺Nを１の位から左に３桁ごと区切り,最後の区画A_n（３桁以下の数)から数えて「奇数番目($A_n, A_{n-2}, A_{n-4}, \cdots$)の和から偶数番目($A_{n-1}, A_{n-3}, A_{n-5}, \cdots$)の和を引いたもの」が７の倍数（少々面倒です）下図参照のこと



(ⅳ) **Nが８の倍数⟺Nの「下３桁」が８の倍数**

(ⅴ) **Nが９の倍数⟺Nの「各位の数の和」が９の倍数**

(ⅵ) Nが11の倍数⟺Nの一の位から左に向かって「奇数番目の各位の数の和から,偶数番目の各位の和を引いたもの」が 11 の倍数

(ⅶ) Nが 13 の倍数$\Longleftrightarrow$(ⅲ)と同様に$A_k(k=1,2,3,\cdots)$を定め，「奇数番目の和から偶数番目の和を引いたもの」が 13 の倍数

これらは合同式でも証明できます。

ツール7　$2n, 2n+1\,;\,3n, 3n+1, 5n, 5n\pm1, 5n\pm2$

$\boldsymbol{2n, 2n+1}$ は，「偶数か奇数か」で場合分けして考える必要があるとき，
$\boldsymbol{3n, 3n\pm1}$ は「３の倍数，３で割って１あるいは２余る」場合のときを考える必要があるとき，
$\boldsymbol{n, 5n\pm1, 5n\pm2}$ は「５の倍数，５で割って１，２，３，４余る」場合を考える必要があるときに，
このようなおき方をすると処理がしやすくなります。
$3n, 3n\pm1$ を$3n, 3n+1, 3n+2, 3n+3, 3n+4$, $n, 5n\pm1, 5n\pm2$ を$5n, 5n+1, 5n+2, 5n+3, 5n+4$
とおくより効率よく，本質を見失うことなく処理できます。

入試問題　n が２以上の整数のとき，n^3-n は６で割り切れることを示せ。【宮崎大】

ツール8　(整式(式))×(整式(式))＝(整数)の解き方

たとえば，$mn+2m+n=4$ を満たす自然数m, n ，あるいは整数m, n を求める場合は，
(整数式)×(整数式)＝(整数) の形に変形し，右辺の整数を２つの整数の積にして，整数(式１)と整数(式２)のとる値を調べます。

$mn+2m+n=4$ より，$(m+1)(n+2)=6$ です。また，m, n が自然数より，$m+1$ は２以上の自然数，$n+2$ は３以上の自然数です。ここで，$6=1\times6, 2\times3, 3\times2, 6\times1$ ですから，該当するのは $m+1=2, n+2=3$ です。よって，$m=n=1$ です。

これが，$mn+2m+n=4$ を満たす整数m, n を求める場合は，
$6=-6\times(-1), -3\times(-2), -2\times(-3), -1\times(-6), 1\times6, 2\times3, 3\times2, 6\times1$ ですから，表を作ってみると，(これは是非活用してみてください)

$m+1$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
$n+2$	-1	-2	-3	-6	6	3	2	1
m	-7	-4	-3	-2	0	1	2	5
n	-3	-4	-5	-8	4	1	0	-1

よって，該当する(m, n)は，
$(m, n)=(-7, -3), (-4, -4), (-3, -5), (-2, -8), (0, 4), (1, 1), (2, 0), (5, -1)$ の８組あります。
このように，表にすると求めやすくなります。

ツール9　分数方程式の整数解

分数方程式とは何か？　その整数解とは何か？　大学入試問題を例にとってみましょう。

整数の解です

入試問題　p を素数とする。x, y に関する方程式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{p}$ を満たす正の整数の組(x, y) をすべて求めよ。【お茶の水女大】

分数式の方程式です

入試問題　x, y を正の整数とする。(1) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ を満たす組(x, y) をすべて求めよ。【名大】

分数方程式というのはこういう意味です。(分数形の方程式･･･そのまんまじゃないか！)
分数方程式は，ツール８で説明した (**整数式**)×(**整数式**)＝(**整数**) の形に変形します。
お茶大の問題をやってみましょう。
　与えられた方程式の分母を払うために，両辺にxyp を掛けて$py+px=xy$ となります。
これを(**整数式**)×(**整数式**)＝(**整数**) になるように変形して，$(x-p)(y-p)=p^2$
　この変形ができますか？
　$xy-px-py=0$ ……①　①の左辺を見て$(x-p)(y-p)$ の形になるように細工します。
逆算すればよいのです。 $(x-p)(y-p)=xy-px-py\underline{+p^2}$ ですから，①の両辺にp^2 をたして
$xy-px-py+p^2=p^2$ とすればできます。
　さて，p が素数であることから，$p^2=1\times p^2, p\times p, p^2\times 1$ といった積にしかできません。

$x-p$	1	p	p^2
$y-p$	p^2	p	1
x	$p+1$	$2p$	p^2+p
y	p^2+p	$2p$	$p+1$

よって，$(x, y)=(p+1, p^2+p), (2p, 2p), (p^2+p, p+1)$ です。
　※ $xy+px+qx=0$ は，$xy+px+qx\underline{+pq}=0\underline{+pq}$　$\therefore (x+p)(x+q)=pq$　のようにできます。
↑　↑
xの係数の積を両辺にたす

ツール１０　連続する整数の積

$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を見たとき，右辺は分数にならないか心配した人はいませんか？
平方数を足した結果ですから，そんなことはないのですが，$\frac{1}{6}$ があるとそう思うのも仕方ないでしょう。
実は，連続する整数の積$n(n+1)$ は偶数です。
　k を整数として，$n=3k-1, 3k$ のときは，$n(n+1)$ は３の倍数でもあるので，$n(n+1)$ は６の倍数です。
よって，$n(n+1)(2n+1)$ は６の倍数です。
　また，$n=3k+1$ のときは，$2n+1=2(3k+1)+1=3(k+1)$ ですから，$2n+1$ が３の倍数になるから，
$n(n+1)(2n+1)$ は６の倍数です。(**ツール７**参照)
$n(n+1)(n+2)$ のように，**３つの連続する整数の積**では，$n(n+1)$ は偶数で，$n, n+1, n+2$ のどれかが３の倍数ですから，２×３＝６で６の倍数です。(ここで，２と３は**互いに素**(ツール３)
だから２×３＝６の倍数となります。２の倍数かつ４の倍数だから２×４＝８の倍数ではありません。反例12)
　一般に<u>**「連続するk 個の整数の積は，k！の倍数」**</u>です。←これは使えるツール
n を整数とすると，次のことが成り立ちます。

１。 $n(n+1)$ は, $2!=2$ の倍数
２。 $n(n+1)(n+2)$ は, $3!=6$ の倍数
３。 $n(n+1)(n+2)(n+3)$ は, $4!=24$ の倍数

入試問題　n が３以上の奇数のとき，n^3-n は２４で割り切れることを示せ。【宮崎大】

ツール１１　$\sqrt{}$ と平方数

　入試問題で考えてみましょう。$\sqrt{x}$ が整数になるためには，x は平方数k^2 (**kは0以上の整数**)，つまり

$0, 1, 4, 9, 16, 25, \cdots$ でなければなりません。

また，$11^2=121, 12^2=144, 13^2=169, 14^2=196, 15^2=225$ ぐらいは覚えておきましょう。

入試問題 x の２次方程式$x^2+(n-7)x-2n^2-2n+25=0$ が整数の解をもつように，自然数n の値を定めよ。【旭川医大　改】

解の公式から，$x=\dfrac{-n+7\pm\sqrt{9n^2-6n-51}}{2}$

x が整数になるためには，$\sqrt{\ }$ の中の$9n^2-6n-51$ が**平方数**でなければなりません。

（注意：必要条件であり，十分条件ではありません）

よって，$9n^2-6n-51=k^2$（kは0以上の整数）とおいて，**ツール８**を使います。

$$9n^2-6n\quad -k^2=51$$
$$9n^2-6n\underline{+1}-k^2=51\underline{+1}$$
$$(3n-1)^2\quad -k^2=52$$
$$(3n+k-1)(3n-k-1)=52$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 52 \\ \hline 2 & 26 \\ \hline & 13 \end{array}$$

より$52=2^2\cdot 13$ であり，

また，$3n+k-1>0,\ 3n+k-1>3n-k-1$ より，（可能性のあるものすべてをかくと面倒ですから･･･）絞り込んで，

$3n+k-1$	13	26	52
$3n-k-1$	4	2	1
n	$\dfrac{19}{6}$ ×	5 ○	$\dfrac{55}{6}$ ×
k	$\dfrac{9}{2}$ ×	12 ○	$\dfrac{51}{2}$ ×

○……n ：自然数，k ：０以上の整数，×……それ以外

このとき，$x=\dfrac{-5+7\pm\sqrt{12^2}}{2}=\dfrac{2\pm 12}{2}=-5, 7$ です。n は自然数より，$n=5$ です。

ツール１２　ガウス記号$[x]$：xを超えない最大整数

$[x]$ は実数x を超えない最大の整数を表します。これは数学Ⅰで学習しています。

たとえば，$[\sqrt{2}]=[1.414\cdots]=1, [-\pi]=[-3.141\cdots]=-4$ です。

$[-\pi]=[-3.141\cdots]\fallingdotseq -3$ に注意してください。

また，これは**n を整数として，$n\leqq x<n+1$ のとき，**$[x]=n$ ということです。

ガウス記号[ ]　　$[x]=n\Longleftrightarrow n\leqq x<n+1$（**$n$は整数**）

注意：実数x が正のときは，$[x]$ をx の整数部分と考えてよいですが，負のときは間違いです。

入試問題 $\dfrac{14}{3}<x<5$ のとき，$\left[\dfrac{3}{7}x\right]-\left[\dfrac{3}{7}[x]\right]$ を求めよ。【早稲田大】

$\dfrac{14}{3}<x<5$　つまり　$4.666\cdots<x<5$ であるから，$[x]=4$

$\dfrac{14}{3}<x<5$ より，$2<\dfrac{3}{7}x<\dfrac{15}{7}=2.14\cdots$ であるから，$\left[\dfrac{3}{7}x\right]=2$

$[x]=4$ より，$\dfrac{3}{7}[x]=\dfrac{12}{7}=1.71\cdots$ であるから，$\left[\dfrac{3}{7}[x]\right]=1$

よって，$\left[\dfrac{3}{7}x\right]-\left[\dfrac{3}{7}[x]\right]=2-1=1$

ツール１３　二項定理 $(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$

$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r=a^n+b^n+\sum_{r=1}^{n-1}{}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$

合同式(ツール５)との関係から，調べてみましょう。

$n=p$(素数) のとき，二項係数${}_p\mathrm{C}_r=p\times\dfrac{(p-1)(p-2)\cdots(p-r+1)}{r(r-1)\cdots3\cdot2\cdot1}$ となりますが，p は素数ですから，

$2, 3, \cdots, r-1, r$ のいずれでも割り切れません。一方，左辺の${}_p\mathrm{C}_r(r=1, 2, \cdots, p-1)$ は組合せの数ですから自然数です。すると $\dfrac{(p-1)(p-2)\cdots(p-r+1)}{r(r-1)\cdots3\cdot2\cdot1}$ が自然数にならざるをえません。

よって，${}_p\mathrm{C}_r(r=1, 2, \cdots, p-1)=p\times$(自然数) となるので，${}_p\mathrm{C}_r(r=1, 2, \cdots, p-1)\equiv0 \pmod{p}$ です。

また，a, b が自然数のとき，$a^{p-r}b^r\ (r=1, 2, \cdots, p-1)$ も自然数ですから，

$(a+b)^p-a^p+b^p=\sum_{r=1}^{p-1}{}_p\mathrm{C}_r a^{p-r}b^r$ において，${}_p\mathrm{C}_r a^{p-r}b^r\equiv0 \pmod{p}\ (r=1, 2, \cdots, p-1)$ ですから，

$\sum_{r=1}^{p-1}{}_p\mathrm{C}_r a^{p-r}b^r\equiv0 \pmod{p}$ です。

　これより，$\boldsymbol{(a+b)^p\equiv a^p+b^p \pmod{p}}$ です。

いくつか具体的に書き並べてみましょう。

p は素数ですから，$p=2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots$ です。このとき，

$(a+b)^2\equiv a^2+b^2 \pmod{2}$　$(a+b)^3\equiv a^3+b^3 \pmod{3}$　$(a+b)^5\equiv a^5+b^5 \pmod{5}$　$(a+b)^7\equiv a^7+b^7 \pmod{7}$

　　　……

また，$\sum_{r=1}^{p-1}{}_p\mathrm{C}_r a^{p-r}b^r\equiv0 \pmod{p}$ を利用すると，

$f(k)=k^p-k$ とおくと，$f(k+1)-f(k)=(k+1)^p-(\cancel{k}+1)-(k^p\cancel{-k})=(k+1)^p-(k^p+1)$

ここで，$(k+1)^p\equiv k^p+1 \pmod{p}$ ですから，$f(k+1)-f(k)\equiv0 \pmod{p}$

つまり，$f(k+1)\equiv f(k) \pmod{p}$　すると，$f(n)\equiv f(n-1)\equiv\cdots\equiv f(1)=0 \pmod{p}$

よって，$f(n)=n^p-n\equiv0 \pmod{p}$　すなわち　$n^p\equiv n \pmod{p}$ です。

１．p が素数，n が自然数のとき，$n^p\equiv n \pmod{p}$

２．p が素数，n が自然数で，しかもp とn が互いに素のとき，$n^{p-1}\equiv1 \pmod{p}$

２. を**フェルマーの(小)定理**といいます。

ツール１４　背理法

　数学Aでは，$\sqrt{2}$ が無理数であることを背理法で証明しています。

背理法とは，「その命題が成り立たないと仮定すると，矛盾が生じるから，その命題は成り立たなければならない。」という論法です。

　この場合は，$\sqrt{2}$ が無理数ではないと仮定すると，$\sqrt{2}$ は正の有理数となるから，**１以外の公約数をもたない自然数**m, n を使って，$\sqrt{2}=\dfrac{m}{n}$ と表せます。

後は，用意した数学的事実を使って，議論を展開すると，m, n が偶数になってしまいます。偶数どうしは２以上の公約数をもつので，m, n が１以外の公約数をもたない自然数ということに矛盾します。よって，$\sqrt{2}$ が無理数でなければならないのです。

入試問題

⑴ m^2 を５で割ったときの余りは，０，１，４のいずれかであることを証明せよ。

⑵ m^2 が５の倍数ならば，m は５の倍数であることを証明せよ。

⑶ $\sqrt{5}$ が無理数であることを証明せよ。【山口大】

ツール１５　不定方程式$ax=by$(a, bは互いに素である自然数)の整数解

「不定」とは，定まらないことですが，ここでは解(整数解)無限にあるという意味です。無限にあって定まらないということで，解そのものが定まらないわけではありません。x, y には媒介変数(整数)k を介して，関係があります。

なお，この不定方程式の解は，k を整数として，$x=bk, y=ak$ と表せます。

$\boxed{\text{例}}$　不定方程式$2x=3y$ の整数解は，２と３が互いに素であるから，$x=3k, y=2k$ (kは整数) です。

不定方程式$4x=6y$ の整数解は，一見，$x=6k, y=4k$ (kは整数) のように思えますが，４と６は互いに素ではないので，これはダメです。４と６の最大公約数２で両辺を割れば，不定方程式$2x=3y$ と同じですから，解は$x=3k, y=2k$ (kは整数) です。

これは，原点を通って，傾きが $\frac{2}{3}$ の直線上にある**格子点(x 座標，y 座標ともに整数の点)**を求めることになります。**x 座標**が３の倍数，つまり$x=3k$ (kは整数) でなければならないことがわかるでしょう。

ツール１６　不定方程式$ax+by=c$(a, b, cは自然数)の整数解

例 ⑴　方程式$2x+3y=7$ の**自然数解**(x, y) を求めよ。

$2x+3y=7$ ……①を変形して，$y=\dfrac{7-2x}{3}$ ……②

yが自然数より$y>0$　よって，$7-2x>0$　すなわち，　$x<\frac{7}{2}$ ←x の絞り込み

x が自然数より，これに適するのは$x=1, 2, 3$　……①に代入　←x の候補

順に，$y=\frac{5}{3}, 1, \frac{1}{3}$　y が自然数より$y=1$ ($x=2$のとき)　←x, y ともに自然数となるものを決定

よって，方程式$2x+3y=7$ の自然数の解(x, y) は$(x, y)=(2, 1)$ です。

これはグラフで考えると，第１象限内の直線①上にある**格子点(x 座標，y 座標ともに整数の点)**を求めたことになります。

⑵　方程式$2x+3y=7$ の**整数解**(x, y) を求めよ。

これはグラフで考えると，直線①上にある**格子点(x 座標，y 座標ともに整数の点)**を求めることになります。⑴の結果と**ツール１５**を使います。

⑴の結果より，$2\times2+3\times1=7$ ……③

$$
①-③より，\quad
\begin{array}{rrrl}
 & 2x & +3y & =7\cdots\cdots① \\
-) & 2\cdot2 & +3\cdot1 & =7\cdots\cdots③ \\
\hline
 & \multicolumn{3}{l}{2(x-2)+3(y-1)=0}
\end{array}
$$

よって，$2(x-2)=3(-y+1)$　ここで，$X=x-2, Y=-y+1$ とすると，$2X=3Y$となります。

この不定方程式の整数解は，**ツール１５**で求めたように，$X=3k, Y=2k$ (kは整数) です。

したがって，$x=3k+2, y=-2k+1$ (kは整数) です。

a, b, c を整数とするとき，

不定方程式$ax+by=c$ が整数解をもつ$\Longleftrightarrow$$c$ がa とb の最大公約数g で割り切れる

ということは，a とb が互いに素(つまり最大公約数が１)であればc は最大公約数$g=1$ で割り切れますから，不定方程式$ax+by=c$ は整数解をもちます。

その解の１つ(**特殊解**といいます)を$(x, y)=(x_1, y_1)$ とすると，この不定方程式のすべての解は，

$(x, y)=(bk+x_1, -ak+y_1)$ (**kは整数**) です。

ツール１７　p 進法(p 進記数法)

10 進法で表されたn 桁の整数$N=a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{n-2}a_{n-1}a_n$ は，

$N=a_1\times10^{n-1}+a_2\times10^{n-2}+a_3\times10^{n-3}+\cdots\cdots+a_{n-2}\times10^2+a_{n-1}\times10+a_n$

において，各位の数a_k（a_1は１以上９以下の自然数，他は０以上９以下の整数）を左から順に並べて表したものです。これを**位取り記数法**といいます。

たとえば，10進法での$12345_{(10)}$（右端の $_{(10)}$ は10進法表示という意味です）は，

$12345_{(10)}=1\times10^4+2\times10^3+3\times10^2+4\times10+5$ ということです。

すると，pを２以上の自然数として，p進法で表されたn桁の整数$N_{(p)}=a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{n-2}a_{n-1}a_n$は，

$N_{(p)}=\boldsymbol{a}_1\times p^{n-1}+\boldsymbol{a}_2\times p^{n-2}+\boldsymbol{a}_3\times p^{n-3}+\cdots\cdots+\boldsymbol{a}_{n-2}\times p^2+\boldsymbol{a}_{n-1}\times p+\boldsymbol{a}_n$

（a_k（a_1は１以上$p-1$以下の自然数，他は０以上$p-1$以下の整数）という意味になります。

これを$N_{(p)}=a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{n-2}a_{n-1}a_{n(p)}$ と表します。pを**底（てい）**といいます。

例　$12345_{(7)}=1\times7^4+2\times7^3+3\times7^2+4\times7+5$

底の変換法（p 進法を別のp' 進法にする）

手始めに，簡単な例をしましょう。

$12_{(10)}=1\times10+2=1\times(7+3)+2=1\times7+5=15_{(7)}$

$49_{(10)}=1\times7^2=1\times7^2+0\times7+0=100_{(7)}$

つまり，10進法での12は７進法での15，10進法での49は７進法での100になります。

数としては同じですが，表記が違うということです。

厳密には，$49_{(10)}$点＝$100_{(7)}$点 ですが，みかけは49点が100点になります！

「テストの点を７進法に変換してくれ〜」という人はいませんか？

● **自然数の底の変換法**

5)321
　5)64　……1　←321を5で割って，商64，余り1　←a_4
　5)12　……4　← 64を5で割って，商12，余り4　←a_3
　　2　……2　← 12を5で割って，商2，余り2　←a_2
　　↑
　　a_1

この計算から，$321=\underline{2}\times5^3+\underline{2}\times5^2+\underline{4}\times5+\underline{1}$ ですから，$321_{(10)}=2241_{(5)}$

● **小数の底の変換法**

では，10進法での小数0.24を５進法での小数に直すにはどうしたらよいでしょう。

10進法での小数$0.a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{n(10)}$は，$\boldsymbol{a}_1\times10^{-1}+\boldsymbol{a}_2\times10^{-2}+\boldsymbol{a}_3\times10^{-3}+\cdots\cdots+\boldsymbol{a}_n\times10^{-n}$

各位の数a_k（a_nは１以上９以下の自然数，他は０以上９以下の整数）を０。の後に左から順に並べて表したものですから，p進法での小数$0.a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{n(p)}$は，$\boldsymbol{a}_1\times p^{-1}+\boldsymbol{a}_2\times p^{-2}+\boldsymbol{a}_3\times p^{-3}+\cdots\cdots+\boldsymbol{a}_n\times p^{-n}$

です。

各位の数a_kについては，a_nは１以上$p-1$以下の自然数，他は０以上$p-1$以下の整数）という意味です。

$0.24_{(10)}=0.a_1a_2a_3\cdots\cdots_{(5)}$ としてみましょう。すると，これには次のような関係があります。

$0.24=\dfrac{a_1}{5}+\dfrac{a_2}{5^2}+\dfrac{a_3}{5^3}+\cdots\cdots$　　　……①

①の両辺を５倍すると，$1.2=a_1+\dfrac{a_2}{5}+\dfrac{a_3}{5^2}+\cdots\cdots$ …②

②の両辺の整数部分を比較すれば，$a_1=1$ とわかります。

②より，$0.2=\dfrac{a_2}{5}+\dfrac{a_3}{5^2}+\cdots\cdots$ ……③

③の両辺を５倍すると，$1.0=a_2+\dfrac{a_3}{5}+\cdots\cdots$　　　…③

③の両辺の整数部分を比較すれば，$a_2=1$ とわかります。

③より，$0.0=a_3+\cdots\cdots$　…④

④の両辺の整数部分を比較すれば，$a_3=0$ とわかります。

　　　0. 2 4
　　　　 ×5
a_1 → 1. 2 0
　　　　 ×5
a_2 → 1. 0

$a_4=a_5=a_6=\cdots=0$ であることもわかりますので，$0.24_{(10)}=0.11_{(5)}$ です。
以上から，$321.24_{(10)}=2241.11_{(5)}$ です。

ツール１８　領域内の整数（格子点）

入試問題

a を正の実数，$f(x)=ax^2-2ax$ とする。関数$y=f(x)$ のグラフとx 軸とで囲まれる図形をD，その面積をS とする。また，D の内部(境界を除く)に含まれる格子点の個数をN とする。このとき，$S=2N$ となるようなa とN の組をすべて求めよ。ここで，格子点とはx 座標 y 座標が共に整数値である点をいう。【神戸大】
定積分で面積を求めることをまだ学習していないので，次の例を考えてみましょう。

例　放物線$y=x^2$, x 軸および直線$x=10$ で囲まれた領域D (境界を除く)に含まれる格子点の個数を求めてみましょう。

$x=1$ のとき，格子点$(1, 0), (1, 1)$ は，境界上の点であるから領域D には含まれない。
$x=2$ のとき，領域D 内の格子点は，$(2, 1), (2, 2), (2, 3)$ の$2^2-1=3$ 個
$x=3$ のとき，領域D 内の格子点は，$(3, 1), (3, 2), (3, 3), \cdots, (3, 8)$ の$3^2-1=8$ 個
…………………
$x=9$ のとき，領域D 内の格子点は，$(9, 1), (9, 2), (9, 3), \cdots, (9, 9^2-1)$ の$9^2-1=80$ 個
よって，領域D (境界を除く)に含まれる格子点の個数N は，

$$N=\sum_{k=2}^{9}(k^2-1)=\sum_{k=1}^{9}(k^2-1)\ (\because\ 1^2-1=0)$$
$$=\frac{1}{6}\cdot9\cdot(9+1)\cdot(2\cdot9+1)-9$$
$$=276(\text{個})$$

参考平成２２年度第２回考査理数数学Ⅱ数学Ｂ第12問

領域$\mathrm{D}=\{(x, y)|x\leqq y\leqq 2x, 0\leqq x\leqq 50\}$ について，次の問いに答えよ。
⑴　$x=k(k=0, 1, 2, 3, \cdots, 50)$ のとき，領域D内(境界は含む)にある格子点(x 座標もy 座標も整数である点)の個数をk で表せ。
⑵　領域D内(境界は含む)にある格子点の総数を求めよ。

ツール１９　整数解をもつ２次方程式の決定

２次方程式の係数が文字で表されているとき，その文字にどのような値を代入したとき，２次方程式の解が２つとも整数解になるか，その値を求めようという問題です。
入試問題からやってみましょう。

入試問題

２次方程式$x^2-kx+4k=0$ (ただし，k は整数)が２つの整数解をもつとする。整数k の最小値をm とするとき，$|m|$を求めよ。【自治医大】
ポイントは，**解と係数の関係**を使うことです。
この２次方程式の２つの整数解を$\alpha, \beta\ (\alpha\geqq\beta)$ とすると，解と係数の関係から，
$\alpha+\beta=k$ ……①, $\alpha\beta=4k$　……②
①②から，k を消去して，$\alpha\beta=4\alpha+4\beta$　　ここで，**ツール８**を使います。
$\alpha\beta-4\alpha-4\beta=0\iff\alpha\beta-4\alpha-4\beta+16=16\iff(\alpha-4)(\beta-4)=16$
$\alpha\geqq\beta$ としたから，$\alpha-4\geqq\beta-4$ です。
$16=16\times1, 8\times2, 4\times4, -1\times(-16), -2\times(-8), -4\times(-4)$ のように(左)≧(右)の積にして，
表を完成します。

$\alpha-4$	16	8	4	-1	-2	-4
$\beta-4$	1	2	4	-16	-8	-4
α	20	12	8	3	2	0
β	5	6	8	-12	-4	0
k	25	18	16	-9	-2	0

整数kの最小値は-9ですから，$m=-9$　よって，$|m|=9$です。

ツール20　整除

「割り切れることを示せ」というような問題です。整式で表されているときには，因数分解や合同式，連続する整数の積，さらにはフェルマーの定理も使います。

入試問題　nを正の整数とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　n^2が偶数のとき，n^2は4で割り切れることを示せ。

(2)　n^2-1が偶数のとき，n^2-1は8で割り切れることを示せ。

(3)　$2^{4n}-1$は15で割り切れることを示せ。【富山大】

単に，割り切れることを示すのではなく，何回割り切れるかその回数を問う問題もあります。

入試問題

pを素数，nを正の整数とするとき，$(p^n)!$はpで何回割り切れるか。【京大】

問題集

$625!=(5^4)!=625\cdot624\cdot623\cdots\cdots5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$を10で繰り返し割るとき，最大何回続けて割り切れるか。

〜〜

それでは，きちんと理解できたか，使って解けるかを確認しましょう。

一人１問以上，班毎に協力し合って解きましょう。

午後からは，個別探究と班別探究の時間になります。

２年前の課題研究のようす

個別探究問題

$\boxed{1}$　m, n は0以上の整数とする。n 以下の素数の個数を $f(n)$, $f(n)$ が m 以上であるような n の 最小値を $g(m)$ と書くとき，次の問いに答えよ。なお，定義より $f(0)=f(1)=0$ である。【慶大　改】

⑴　2から30までのうちで，素数であるものをすべてかけ。

⑵　$f(0)$ から $f(30)$ までを求めよ。

⑶　$g(0), g(1), g(10)$ を求めよ。

$\boxed{2}$　次の問いに答えよ。【東京理大　改】

⑴　175，1323，5832を素因数分解せよ。

⑵　x, y, z, a を正の整数とするとき，$175x=1323y=5832z=a^2$ を満たす最小の a の値を求めよ。

⑶　$\dfrac{m}{175}, \dfrac{m^2}{1323}, \dfrac{m^3}{5832}$ がすべて整数となるような正の整数 m のうち，最小のものを求めよ。

$\boxed{3}$　次の問いに答えよ。【千葉大　改】

⑴　5以上の素数は，ある自然数 n を用いて $6n+1$ または $6n-1$ の形に表されることを示せ。

⑵　N を自然数とする。$6N-1$ は $6n-1$ （n は自然数）のかたちで表される素数を約数にもつことを示せ。

ヒント：背理法と⑴

$\boxed{4}$　次の問いに答えよ。

⑴　2088と4728の最大公約数 $(2088, 4728)$ と最小公倍数 $[2088, 4728]$ を求めよ。

⑵　最大公約数が29で，最小公倍数が4147である2つの3桁の自然数を求めよ。

$\boxed{5}$　次の問いに答えよ。

⑴　$20!=2^m k$（k は奇数）が成り立つとき，整数 m の値を求めよ。【鹿児島大】

⑵　和が477で，最小公倍数が742である2つの自然数を求めよ。

自然数 a, b が互いに素のとき，$a+b$ と ab が互いに素であることを使ってよい。

$\boxed{6}$　自然数 a, b, c, d は，$c=4a+7b, d=3a+4b$ を満たしているものとする。【千葉大】

⑴　$c+3d$ が5の倍数ならば，$2a+b$ も5の倍数であることを示せ。

⑵　a と b が互いに素で，c と d がどちらも素数 p の倍数ならば，$p=5$ であることを示せ。（ヒント：背理法）

$\boxed{7}$　正の整数 n に対し，n の正の約数すべての和を $\sigma(n)$ とおく。（σ ・・・ Σ の小文字）

ただし，1と n も n の約数とする。以下の問いに答えよ。【お茶の水女大】

⑴　素数 p , 正の整数 a に対し，$n=p^a$ とおく。$\sigma(n)$ を p と a で表せ。

⑵　相異なる素数 p, q , 正の整数 a, b に対し，$n=p^a, m=q^b$ とおく。このとき，$\sigma(mn)=\sigma(m)\sigma(n)$ が成立することを証明せよ。

$\boxed{8}$　次の問いに答えよ。

⑴　2009の約数は，2009自身も含めて，何個あるか。【小樽商大】

⑵　8個の約数をもつ最小の自然数を求めたい。

(ア) 素因数が2のとき，(イ) 素因数が2と3のとき，(ウ) 素因数が2，3，5のときに場合分けして求めよ。

$\boxed{9}$　次の問いに答えよ。

⑴　n を自然数とする。$2^{n+1}-1$ が素数のとき，$2^n(2^{n+1}-1)$ は完全数であることを証明せよ。

⑵　完全数を小さい順に3つほど挙げよ。

$\boxed{10}$　次の問いに答えよ。【名大　改】

⑴　0以上9以下の整数の中で，$3^4 \equiv \boxed{} \pmod{10}$ にあてはまるものを求めよ。

⑵　⑴の結果を利用して，整数 3^{333} の一の位の数を求めよ。

$\boxed{11}$　次の問いに答えよ。

⑴　整数の平方を7で割ったときの余りは，0，1，2，4であることを，合同式を用いて証明せよ。

⑵　⑴の結果を利用して，a^2+b^2 が7の倍数であれば，整数 a, b はともに7の倍数であることを証明せよ。

12 次の問いに答えよ。

⑴ 4753869120は，3の倍数でも，4の倍数でも，5の倍数でも，6の倍数でも，8の倍数でも，9の倍数でもあることを，倍数の判定法を使って確かめよ。

⑵ 3桁の自然数aについて，百の位をa_1，十の位をa_2，一の位をa_3とする。$a_1+a_2+a_3$とaは9で割った余りが等しいことを示せ。【福岡教育大】

13 ４桁の正の整数がある。これが5の倍数であり，下3桁の各位の数字の和は20である。

また，一の位の数字と百の位の数字の和は3の倍数であり，十の位と千の位の数字の和は6の倍数である。このとき，この整数を求めよ。【兵庫医大】

14 次の問いに答えよ。

⑴ 自然数の平方を3で割ったときの余りは，0か1であることを証明せよ。

⑵ 自然数の平方を5で割ったときの余りは，2，3にならないことを証明せよ。

15 mを自然数とするとき，m^2を5で割ったときの余りは，0,1,4のいずれかであることを証明せよ。【山口大】

16 2以上の整数m，nは，$m^3+1^3=n^3+10^3$をみたす。m, nを求めよ。【一橋大】

17 45を引いても44を足しても平方数となるような自然数を求めよ。

ただし，平方数とはある自然数nによってn^2と表される数のことである。【東京女大】

18 $x \neq 0, y \neq 0$のとき，$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{3}{xy}=1$を満たす整数の組$(x, y)$をすべて求めよ。【津田塾大】

19 pを3以上の素数とするとき，次の問いに答えよ。【名大 改】

⑴ $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{p}$ をみたす正の整数の組(x, y)をすべて求めよ。

⑵ ⑴で求めた組(x, y)のうち，$2x+3y$を最小にする (x, y)を求めよ。

ヒント：たとえば$p=3$として，予想を立ててみよ。

20 nが2以上の整数のとき，n^3-nは6で割り切れることを示せ。【宮崎大】

21 nが自然数のとき，次の問いに答えよ。

⑴ $(n-1)n(n+1)(n+2)$は24の倍数であることを証明せよ。

⑵ ⑴を利用して，$n^4+2n^3+11n^2+10n$は24の倍数であることを証明せよ。

22 自然数nで，$\sqrt{n^2-n+20}$の整数部分がnとなるものは全部でいくつあるか。【獨協大】

23 次の問いに答えよ。

⑴ 方程式 $\left[\dfrac{3n+2}{7}\right]=0$を満たす自然数$n$を求めよ。

⑵ 実数x，yに対して，$[x+y]-[x]-[y]$の値を求めよ。

24 次の問いに答えよ。【早稲田大 改】

⑴ $f(x)=\left[\dfrac{1}{2}x\right]-\left[\dfrac{1}{2}[x]\right]$について，$f\left(\dfrac{3}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{7}{3}\right)$の値を求めよ。

⑵ mを整数として，$m \leqq x < m+1$と表されるとき，kを整数として，$m=2k$と表される場合と $m=2k+1$と表される場合に分けて，$\left[\dfrac{1}{2}x\right]-\left[\dfrac{1}{2}[x]\right]$を求めよ。

25 次の問いに答えよ。

⑴ 11^{100}の十の位の数と一の位の数を求めよ。　⑵ 21^{21}を400で割ったときの余りを求めよ。

26 nが自然数のとき，$2^{4n}-1$が15で割り切れることを，二項定理を使って証明せよ。【富山大 改】

27 6で割ると5余る正の整数をpとし，nを自然数とするとき，p^{2n+1}もまた6で割ると5余ることを証明せよ。ヒント：二項定理，合同式

28 自然数mの平方m^2が5の倍数のとき，mが5の倍数であることを使って，$\sqrt{5}$が無理数であることを証明せよ。【山口大 改】

29 pを素数，nを 2 以上の自然数とするとき，方程式$x^n-p^nx-p^{n+1}=0$は整数解をもたないことを証明せよ。【千葉大】

30 次の問いに答えよ。

⑴ p，qを素数とするとき，方程式$px=qy$の整数解を求めよ。

⑵ 方程式$6x=8y$の整数解を求めよ。

⑶ 方程式$13x=5y+2$ ・・・・・・①について，次の問いに答えよ。

ア ①を満たす整数解を1つ求めよ。 イ ①の整数解を求めよ。

31 次の方程式の整数解を求めよ。

⑴ $3x+2y+8z=40$ ⑵ $\begin{cases} 2x+3y-4z=8 & \cdots\cdots\cdots① \\ 5x-7y+6z=7 & \cdots\cdots\cdots② \end{cases}$

32 次の問いに答えよ。

⑴ x，y，zが1から9までの自然数とするとき，$3(x-y)=4(y-z)$を満たすx，y，zの値を求めよ。ただし，$x>y>z$とする。

⑵ 整数x, yが$2x-3y=7$を満たすとき，x^2+y^2の最小値とそのときのx, yの値を求めよ。

33 次の数を指定された記数法に改めよ。

⑴ 10進法の43715を6進法に ⑵ 7進法の564355を10進法に

34 次の数を指定された記数法に改めよ。

⑴ 8進法の324．26を10進法に ⑵ 8進法の324．26を6進法に

35 次の問いに答えよ。

⑴ 不等式$x\leqq y\leqq 2x$, $0\leqq x\leqq 50$を満たす格子点(x, y)の個数を求めよ。

⑵ 不等式$0<\left|\dfrac{p}{q}-\dfrac{2}{3}\right|<\dfrac{1}{q^2}$を満たす整数の組$(p, q)$をすべて求めよ。ヒント：$3q^2$をかける【東京工大】

36 放物線$y=\dfrac{1}{2}x^2$，x軸および直線$x=21$で囲まれた図形(境界は含まない)の中に，x座標，y座標がともに整数の点はいくつあるか。【一橋大】

37 次の問いに答えよ。

⑴ 2次方程式$x^2+(m+1)x+2m-1=0$の2つの解が整数となるように整数mの値を定めよ。【宇都宮大】

⑵ p，qはどちらも素数で，これらを係数とするxの2次方程式$x^2-px+q=0$の2つの解がともに整数であるという。p，qおよび2つの解を求めよ。【立命館大】

38 次の問いに答えよ。

⑴ 2次方程式$x^2-17x+7p=0$の2つの解が正の整数となるように，整数pの値を求めよ。【中央大】

⑵ 連立方程式$\begin{cases} x-2y=2 \\ ax+y=6 \end{cases}$が整数解をもつような正の整数$a$の値をすべて求めよ。【創価大】

39 自然数nに対し，$f(n)=6n^5-15n^4+10n^3-n$とおく。このとき，次の問いに答えよ。【香川大】

⑴ $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$の値を求めよ。

⑵ すべての自然数nに対して，$f(n)$は30で割り切れることを示せ。

40 自然数nに対して，$f(n)=5^{3n}+5^{2n}+5^n+1$であるとする。

⑴ nは4の倍数でないとき，$f(n)$は13で割り切れることを証明せよ。

ヒント： $f(n)=(5^n+1)(5^{2n}+1)$，4の倍数でない⟺奇数か$4k+2$型，$5^2=25\equiv -1 \pmod{13}$

⑵ nは4の倍数のとき，$f(n)$を13で割るときの余りを求めよ。ヒント：合同式を使え。

班別探究問題

1 自然数nについて，$n!$の末尾に続く0の個数をa_nとする。このとき，次の問いに答えよ。【群馬大】

⑴ a_5とa_{25}を求めよ。 ⑵ a_{125}を求めよ。 ⑶ $n=5^k$のとき，a_nをkの式で表せ。

2 1，4，9，・・・のように，自然数の2乗となっている数を平方数という。$n(n+24)$という形の平方数(nは自然数)を以下に示す手順により求めたい。この平方数を，自然数の未知数kにより$n(n+24)=(n+k)^2$とおく。このとき，次の問いに答えよ。【中央大】

(1) n をk で表し，k が偶数であることを示せ。　(2) $k \leqq 10$ を示せ。

(3) $k \geqq 4$ を示せ。　(4) $n(n+24)$ という形をした平方数をすべて求めよ。

$\boxed{3}$　p を素数，n を正の整数とするとき，$(p^n)!$ はp で何回割り切れるかを考えるとき，次の問いに答えよ。【京大　改】

(1) $1, 2, 3, \cdots\cdots, p^n$ の中に，$p^k(1 \leqq k \leqq n)$ で割り切れる整数は何個あるか。

(2) $1, 2, 3, \cdots\cdots, p^n$ の中に，$p^k(1 \leqq k \leqq n-1)$ で割り切れるが，$p^{k+1}(1 \leqq k \leqq n-1)$ では割り切れない整数は何個あるか。

(3) $p^k(1 \leqq k \leqq n-1)$ で割り切れるが，$p^{k+1}(1 \leqq k \leqq n-1)$ では割り切れない整数すべてによって，$(p^n)!$ はp で何回割り切れるか。

(4) (3)を利用して，$(p^n)!$ はp で何回割り切れるかに答えよ。

$\boxed{4}$　p を素数，n を正整数とし，1からp^n までの自然数の集合を$I_n = \{1, 2, 3, \cdots\cdots, p^n\}$　とおく。自然数$l(1 \leqq l \leqq n)$ に対して，I_n に含まれる数でp^l の倍数の個数をc_l，I_n に含まれる数でp^l の倍数であるが，p^{l+1} の倍数ではないものの個数をd_l とおく。 次の問いに答えよ。【中央大　改】

(1) $p=2, n=5$ のとき，c_l, d_l $(l=1, 2, 3, 4, 5)$ の値を求めよ。

　また，2^k が32の階乗　32! を割り切る最大の整数k の値を求めよ・

(2) 一般の素数p と一般の自然数n に対して，c_l, d_l $(1 \leqq l \leqq n)$ の値を，$1 \leqq l \leqq n-1$ と$l=n$ の場合に分けて答えよ。

(3) 一般の素数p と一般の自然数n に対して，p^k がp^n の階乗$(p^n)!$ を割り切る最大の整数k の値(p とn の式)を求めよ。

$\boxed{5}$　自然数n について，以下の問いに答えよ。【神戸大　改】

(1) 恒等式$(n^2+1)-(n+2)(n-2)=5$ を利用して，$n+2$ とn^2+1 の公約数は1または5に限ることを示せ。

(2) (1)を用いて，$n+2$ と n^2+1 が1以外に公約数をもつような自然数n をすべて求めよ。

$\boxed{6}$　**ア，イ，ウ，エ，オ** にあてはまる数値を求めよ。【関西学院大】

(1) 1133958×1134042 を計算すると，$\boxed{\text{ア}}$99$\boxed{\text{イ}}$ となる。

(2) 1133958＝1134000－42＝(27000－1)×42 であるから，1133958 を因数分解したときに現れる素数を小さいものから並べると，2, 3, $\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$, $\boxed{\text{オ}}$ である。

$\boxed{7}$　不定方程式$3x+5y=2009$ ……①をについて考える。

(1) ①を満たす正の整数の組(x, y) の個数を求めよ。

(2) ①を満たす正の整数の組(x, y) の中で，$|x-y|$が最小となる組(x, y) を求めよ。【摂南大】

$\boxed{8}$　a, b, c が整数で，$a^2+b^2=c^2$ であるとき，次のことを証明せよ。

(1) a またはb は，3の倍数である。

(2) a またはb は，4の倍数である。

MEMO