

授業実践記録（数学）

整数の性質についての実践記録

山口県立岩国高等学校 西元 教善

1. はじめに

イギリスの数学者ハーディーは、初等整数論が早期数学教育にとって最適の教材の一つであると言っている。その理由は、予備知識をあまり必要としないこと、親しみやすいこと、推論の過程が単純なこと、好奇心に訴えやすいことにあるという。

しかし、大学入試を考えると予備知識は必要である。現教育課程では数学Ⅰで「整数の性質」を扱い、ある程度の予備知識を得られるが、前教育課程ではそのような機会はなかった。大学入試ではかなりのレベルの整数に関する問題が出題され、教育課程外の内容であってもそれ相応の対応をとっておかなければならなかった。

本校理数科は昭和47年に設置され、爾来独自の行事や課題研究を行っている。平成15年から17年までの3年間は、文部科学省からSSH（スーパーサイエンスハイスクール）に指定され、また恒例行事の中には、理数科2年次生（40名）を対象にした「探究数学」がある。これは8月初旬の1日間を使って、1つのテーマを探究する課題研究である。

2. 探究数学について—生徒の学力向上と教員の指導力向上—

午前が講義、午後が演習という構成である。講義ではその内容について10ページ程度のテキストを用意して、それを解説する。

また、演習は、一人あるいは班ごとに1問（入試問題が中心）を与えて、B5版用紙に解答させる。

また、SSH数学分野担当の経験から、グループで協力して考えることの教育的効果を反映させ、5人ずつのA班からH班までの8つの班ごとに、前年度の整数関係の入試問題を班員で協力して解かせることも行った。

また、教員研修も兼ねて、演習の時間には2年次担当の3人の教員に来てもらい、生徒からの質問を受けってもらうことにした。探究数学の担当者は、基本的には授業担当者+αである。

なお、解答された40枚の解答用紙は、テキストとともにB4版サイズで両面印刷し、実践報告書とする。その際、適当なテキストは見当たらなかったため、独自にテキストを新規作成した。

実践時は前教育課程であり、教科書では整数について深く扱われておらず、この「探究数学（整数探究）」はそれを補充、補強する入試対策の一環でもある。（平成22年度と平成24年度に実施）

日 程

事前説明 8:45～9:00

講 義① 9:00～10:15（75分）

講 義② 10:30～11:45（75分）

昼 食

問題演習① 13:00～14:15（75分）

問題演習② 14:30～15:45（75分）

後片付け 15:45～16:00

3. 探究数学〔整数探究〕のようす

(1) 講義：説明用パワーポイントのスライド

講義については、パワーポイントで行った。スライドは全部で57枚である。そのうちの6枚を紹介する。

ツールを増やそう！

ここで、整数問題を解くにあたって、重要なツールを20個ほど挙げます。

- ツール1 素数・素因数分解
- ツール2 最大公約数・最小公倍数
- ツール3 互いに素
- ツール4 約数の個数・和
- ツール5 合同式
- ツール6 倍数の判定法
- ツール7 $2n, 2n+1; 3n, 3n+1; 5n, 5n+1, 5n+2$
- ツール8 整数(式)×整数(式)=整数(数)の解き方
- ツール9 分数方程式の整数解
- ツール10 連続する整数の積



12

ツール5 合同式の性質

合同式においては、次のことが成り立ちます。
まるで等号「=」のような性質をもっています。
ただし、除法(割算)は注意が必要です。

$a \equiv b \pmod{n}, c \equiv d \pmod{n}$ のとき、

- 1. $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ 加法
- 2. $a - c \equiv b - d \pmod{n}$ 減法
- 3. $ac \equiv bd \pmod{n}$ 乗法
- 4. $a^k \equiv b^k \pmod{n}, (k \text{ は自然数})$ 累乗
- 5. $ac \equiv bc \pmod{n}$ のとき、

c と n の最大公約数を g とすると、 $a \equiv b \pmod{\frac{n}{g}}$
特に、 c と n が互いに素ならば、 $a \equiv b \pmod{n}$ 除法



ツール8 (整数(式))×(整数(式))=(整数)の解き方

たとえば、 $mn+2m+n=4$ を満たす自然数 m, n ，
あるいは整数 m, n を求める場合は、
(整数・式1)×(整数・式2)=(整数)の形に変形し、
右辺の整数を2つの整数の積にして、
整数(式1)と整数(式2)のとり値を調べます。

$mn+2m+n=4$ より、 $(m+1)(n+2)=6$ です。

また、 m, n が自然数より、

$m+1$ は2以上の自然数、 $n+2$ は3以上の自然数です。



ここで、 $6=1 \times 6, 2 \times 3, 3 \times 2, 6 \times 1$ ですから、
該当するのは、 $m+1=2, n+2=3$ です。
よって、 $m=n=1$ です。

25

さて、 p が素数であることから、
 $p^2=1 \times p^2, p \times p, p^2 \times 1$ といった積にしかできません。

$+p$

$x-p$	1	p	p^2
$y-p$	p^2	p	1
x	$p+1$	$2p$	p^2+p
y	p^2+p	$2p$	$p+1$



よって、 $(x, y) = (p+1, p^2+p), (2p, 2p), (p^2+p, p+1)$ です。

※ $xy+px+qx=0$ は、 $xy+px+qx+\underline{pq}=0+\underline{pq} \quad \therefore (x+p)(x+q)=pq$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 x の係数の積を両辺にたす
 のようにできます。

入試問題 【早稲田大】

$\frac{14}{3} < x < 5$ のとき、 $\left\lfloor \frac{3}{7}x \right\rfloor - \left\lfloor \frac{3}{7}[x] \right\rfloor$ を求めよ。



【解】 $\frac{14}{3} < x < 5$ つまり $4.666\cdots < x < 5$ であるから、 $[x] = 4$

$\frac{14}{3} < x < 5$ より、 $2 < \frac{3}{7}x < \frac{15}{7} = 2.14\cdots$ であるから、 $\left\lfloor \frac{3}{7}x \right\rfloor = 2$

$[x] = 4$ より、 $\frac{3}{7}[x] = \frac{12}{7} = 1.71\cdots$ であるから、 $\left\lfloor \frac{3}{7}[x] \right\rfloor = 1$

よって、 $\left\lfloor \frac{3}{7}x \right\rfloor - \left\lfloor \frac{3}{7}[x] \right\rfloor = 2 - 1 = 1$

ツール16 不定方程式 $ax+by=c$ (a, b, c は自然数)の整数解

例 (1) 方程式 $2x+3y=7$ の自然数解 (x, y) を求めよ。

$2x+3y=7$ ……①を変形して、 $y = \frac{7-2x}{3}$ ……②

y が自然数より $y > 0$ よって、②より $7-2x > 0$

すなわち、 $x < \frac{7}{2} \leftarrow x$ の絞り込み

x が自然数より、これに適するの $x=1, 2, 3$ ……①に代入 $\leftarrow x$ の候補

順に、 $y = \frac{5}{3}, 1, \frac{1}{3}$

y が自然数より $y=1$ ($x=2$ のとき) $\leftarrow x, y$ ともに自然数となるものを決定

よって、方程式 $2x+3y=7$ の自然数解 (x, y) は $(x, y) = (2, 1)$ です。

これはグラフで考えると、第1象限内の直線①上にある
 格子点 (x 座標、 y 座標ともに整数の点)
 を求めたことになります。

4. 講義中のようす



5. 問題演習

午後は、問題演習の時間として、個人で解く問題とグループで解く問題を用意して解かせた。問題は次のようなものである。なお、基本的には出席番号と同じ番号の問題を解かせた。部活の大会で4名が欠席したので、1番から36番までを解かせた。早く解けた生徒には、残りの37番から40番の問題を解かせた。

a 個別探究問題

- [1] m, n は0以上の整数とする。 n 以下の素数の個数を $f(n)$, $f(n)$ が m 以上であるような n の最小値を $g(m)$ と書くとき、次の問いに答えよ。なお、定義より $f(0) = f(1) = 0$ である。【慶大 改】
 - (1) 2 から 30 までのうちで、素数であるものをすべてかけ。
 - (2) $f(0)$ から $f(30)$ までを求めよ。
 - (3) $g(0), g(1), g(10)$ を求めよ。
- [2] 次の問いに答えよ。【東京理大 改】
 - (1) 175, 1323, 5832 を素因数分解せよ。
 - (2) x, y, z, a を正の整数とすると、 $175x = 1323y = 5832z = a^2$ を満たす最小の a の値を求めよ。
 - (3) $\frac{m}{175}, \frac{m^2}{1323}, \frac{m^3}{5832}$ がすべて整数となるような正の整数 m のうち、最小のものを求めよ。
- [3] 次の問いに答えよ。【千葉大 改】
 - (1) 5以上の素数は、ある自然数 n を用いて $6n+1$ または $6n-1$ の形に表されることを示せ。
 - (2) N を自然数とする。 $6N-1$ は $6n-1$ (n は自然数) のかたちで表される素数を約数にもつことを示せ。
ヒント：背理法と(1)
- [4] 次の問いに答えよ。
 - (1) 2088 と 4728 の最大公約数(2088, 4728) と最小公倍数[2088, 4728] を求めよ。
 - (2) 最大公約数が29で、最小公倍数が4147である2つの3桁の自然数を求めよ。
- [5] 次の問いに答えよ。
 - (1) $20! = 2^m k$ (k は奇数) が成り立つとき、整数 m の値を求めよ。【鹿児島大】
 - (2) 和が477で、最小公倍数が742である2つの自然数を求めよ。
自然数 a, b が互いに素のとき、 $a+b$ と ab が互いに素であることを使ってよい。
- [6] 自然数 a, b, c, d は、 $c = 4a + 7b, d = 3a + 4b$ を満たしているものとする。【千葉大】

- (1) $c+3d$ が5の倍数ならば, $2a+b$ も5の倍数であることを示せ。
- (2) a と b が互いに素で, c と d がどちらも素数 p の倍数ならば, $p=5$ であることを示せ。(ヒント: 背理法)
- 7 正の整数 n に対し, n の正の約数すべての和を $\sigma(n)$ とおく。($\sigma \cdots \Sigma$ の小文字)
ただし, 1 と n も n の約数とする。以下の問いに答えよ。【お茶の水女大】
- (1) 素数 p , 正の整数 a に対し, $n=p^a$ とおく。 $\sigma(n)$ を p と a で表せ。
- (2) 相異なる素数 p, q , 正の整数 a, b に対し, $n=p^a, m=q^b$ とおく。
このとき, $\sigma(mn)=\sigma(m)\sigma(n)$ が成立することを証明せよ。
- 8 次の問いに答えよ。
- (1) 2009 の約数は, 2009 自身も含めて, 何個あるか。 【小樽商大】
- (2) 8 個の約数をもつ最小の自然数を求めたい。(7) 素因数が2 のとき, (4) 素因数が2 と3 のとき, (5) 素因数が2, 3, 5 のときに場合分けして求めよ。
- 9 次の問いに答えよ。
- (1) n を自然数とする。 $2^{n+1}-1$ が素数のとき, $2^n(2^{n+1}-1)$ は完全数であることを証明せよ。
- (2) 完全数を小さい順に3 つほど挙げよ。
- 10 次の問いに答えよ。【名大 改】
- (1) 0 以上9 以下の整数の中で, $3^4 \equiv \square \pmod{10}$ にあてはまるものを求めよ。
- (2) (1)の結果を利用して, 整数 3^{333} の一の位の数を求めよ。
- 11 次の問いに答えよ。
- (1) 整数の平方を7 で割ったときの余りは, 0, 1, 2, 4 であることを, 合同式を用いて証明せよ。
- (2) (1)の結果を利用して, a^2+b^2 が7 の倍数であれば, 整数 a, b はともに7 の倍数であることを証明せよ。
- 12 次の問いに答えよ。
- (1) 4753869120 は, 3 の倍数でも, 4 の倍数でも, 5 の倍数でも, 6 の倍数でも, 8 の倍数でも, 9 の倍数でもあることを倍数の判定法を使って確かめよ。
- (2) 3 桁の自然数 a について, 百の位を a_1 , 十の位を a_2 , 一の位を a_3 とする。 $a_1+a_2+a_3$ と a は9 で割った余りが等しいことを示せ。【福岡教育大】
- 13 4 桁の正の整数がある。これが6 の倍数であり, 下3 桁の各位の数字の和は20 である。
また, 一の位の数字と百の位の数字の和は3 の倍数であり, 十の位と千の位の数字の和は5 の倍数である。
このとき, この整数を求めよ。【兵庫医大】
- 14 次の問いに答えよ。
- (1) 自然数の平方を3 で割ったときの余りは, 0 か1 であることを証明せよ。
- (2) 自然数の平方を5 で割ったときの余りは, 2, 3 にならないことを証明せよ。
- 15 m を自然数とすると, m^2 を5 で割ったときの余りは, 0, 1, 4 のいずれかであることを証明せよ。
【山口大】
- 16 2 以上の整数 m, n は, $m^3+1^3=n^3+10^3$ をみたす。 m, n を求めよ。【一橋大】
- 17 45 を引いても44 を足しても平方数となるような自然数を求めよ。
ただし, 平方数とはある自然数 n によって n^2 と表される数のことである。【東京女大】
- 18 $x \neq 0, y \neq 0$ のとき, $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = 1$ を満たす整数の組 (x, y) をすべて求めよ。【津田塾大】
- 19 p を3 以上の素数とすると, 次の問いに答えよ。【名大 改】
- (1) $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$ をみたす組 (x, y) をすべて求めよ。
- (2) (1)で求めた組 (x, y) のうち, $2x+3y$ を最小にする (x, y) を求めよ。
ヒント: たとえば $p=3$ として, 予想を立ててみよ。

- 20 n が 2 以上の整数のとき、 $n^3 - n$ は 6 で割り切れることを示せ。【宮崎大】
- 21 n が自然数のとき、次の問いに答えよ。
 (1) $(n-1)n(n+1)(n+2)$ は 24 の倍数であることを証明せよ。
 (2) (1)を利用して、 $n^4 + 2n^3 + 11n^2 + 10n$ は 24 の倍数であることを証明せよ。
- 22 自然数 n で、 $\sqrt{n^2 - n + 20}$ の整数部分が n となるものは全部でいくつあるか。【獨協大】
- 23 次の問いに答えよ。
 (1) 方程式 $\left[\frac{3n+2}{7}\right] = 0$ を満たす自然数 n を求めよ。
 (2) 実数 x, y に対して、 $[x+y] - [x] - [y]$ の値を求めよ。
- 24 次の問いに答えよ。【早稲田大 改】
 (1) $f(x) = \left[\frac{1}{2}x\right] - \left[\frac{1}{2}[x]\right]$ について、 $f\left(\frac{3}{2}\right), f\left(\frac{7}{3}\right)$ の値を求めよ。
 (2) m を整数として、 $m \leq x < m+1$ と表されるとき、 k を整数として、 $m = 2k$ と表される場合と $m = 2k+1$ と表される場合に分けて、 $\left[\frac{1}{2}x\right] - \left[\frac{1}{2}[x]\right]$ を求めよ。
- 25 次の問いに答えよ。
 (1) 11^{100} の十の位の数と一の位の数求めよ。 (2) 21^{21} を 400 で割ったときの余りを求めよ。
- 26 n が自然数のとき、 $2^{4n} - 1$ が 15 で割り切れることを、二項定理を使って証明せよ。【富山大 改】
- 27 6 で割ると 5 余る正の整数を p とし、 n を自然数とすると、 p^{2n+1} もまた 6 で割ると 5 余ることを証明せよ。ヒント：二項定理、合同式
- 28 自然数 m の平方 m^2 が 5 の倍数のとき、 m が 5 の倍数であることを使って、 $\sqrt{5}$ が無理数であることを証明せよ。【山口大 改】
- 29 p を素数、 n を 2 以上の自然数とすると、方程式 $x^n - p^n x - p^{n+1} = 0$ は整数解をもたないことを証明せよ。【千葉大】
- 30 次の問いに答えよ。
 (1) p, q を素数とすると、方程式 $px = qy$ の整数解を求めよ。
 (2) 方程式 $6x = 8y$ の整数解を求めよ。
 (3) 方程式 $13x = 5y + 2 \cdots \cdots \textcircled{1}$ について、次の問いに答えよ。
 ア $\textcircled{1}$ を満たす整数解を 1 つ求めよ。 イ $\textcircled{1}$ の整数解を求めよ。
- 31 次の方程式の整数解を求めよ。
 (1) $3x + 2y + 8z = 40$ (2) $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 8 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 5x - 7y + 6z = 7 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$
- 32 次の問いに答えよ。
 (1) x, y, z が 1 から 9 までの自然数とすると、 $3(x-y) = 4(y-z)$ を満たす x, y, z の値を求めよ。
 ただし、 $x > y > z$ とする。
 (2) 整数 x, y が $2x - 3y = 7$ を満たすとき、 $x^2 + y^2$ の最小値とそのときの x, y の値を求めよ。
- 33 次の数を指定された記数法に改めよ。
 (1) 10 進法の 43715 を 6 進法に (2) 7 進法の 564355 を 10 進法に
- 34 次の数を指定された記数法に改めよ。
 (1) 8 進法の 324.26 を 10 進法に (2) 8 進法の 324.36 を 6 進法に
- 35 次の問いに答えよ。
 (1) 不等式 $x \leq y \leq 2x, 0 \leq x \leq 50$ を満たす格子点 (x, y) の個数を求めよ。
 (2) 不等式 $0 < \left| \frac{p}{q} - \frac{2}{3} \right| < \frac{1}{q^2}$ を満たす整数の組 (p, q) をすべて求めよ。ヒント： $3q^2$ をかける 【東京工大】
- 36 放物線 $y = \frac{1}{2}x^2, x$ 軸および直線 $x = 21$ で囲まれた図形(境界は含まない)の中に、 x 座標、 y 座標がともに整数の点はいくつあるか。【一橋大】

37 次の問いに答えよ。

- (1) 2 次方程式 $x^2 + (m+1)x + 2m - 1 = 0$ の 2 つの解が整数となるように整数 m の値を定めよ。【宇都宮大】
(2) p, q はどちらも素数で、これらを係数とする x の 2 次方程式 $x^2 - px + q = 0$ の 2 つの解がともに整数であるという。 p, q および 2 つの解を求めよ。【立命館大】

38 次の問いに答えよ。

- (1) 2 次方程式 $x^2 - 17x + 7p = 0$ の 2 つの解が正の整数となるように、整数 p の値を求めよ。【中央大】
(2) 連立方程式 $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ ax + y = 6 \end{cases}$ が整数解をもつような正の整数 a の値をすべて求めよ。【創価大】

39 自然数 n に対し、 $f(n) = 6n^5 - 15n^4 + 10n^3 - n$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。【香川大】

- (1) $f(1), f(2), f(3)$ の値を求めよ。
(2) すべての自然数 n に対して、 $f(n)$ は 30 で割り切れることを示せ。

40 自然数 n に対して、 $f(n) = 5^{3n} + 5^{2n} + 5^n + 1$ であるとする。

- (1) n は 4 の倍数でないとき、 $f(n)$ は 13 で割り切れることを証明せよ。
ヒント： $f(n) = (5^n + 1)(5^{2n} + 1)$ 、4 の倍数でない $\Leftrightarrow$ 奇数が $4k+2$ 型、 $5^2 = 25 \equiv -1 \pmod{13}$
(2) n は 4 の倍数のとき、 $f(n)$ を 13 で割るときの余りを求めよ。ヒント：合同式を使い。

b 班別探究問題

1 自然数 n について、 $n!$ の末尾に続く 0 の個数を a_n とする。このとき、次の問いに答えよ。【群馬大】

- (1) a_5 と a_{25} を求めよ。(2) a_{125} を求めよ。(3) $n = 5^k$ のとき、 a_n を k の式で表せ。

2 1, 4, 9, $\dots$ のように、自然数の 2 乗となっている数を平方数という。 $n(n+24)$ という形の平方数 (n は自然数) を以下に示す手順により求めたい。この平方数を、自然数の未知数 k により $n(n+24) = (n+k)^2$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。【中央大】

- (1) n を k で表し、 k が偶数であることを示せ。(2) $k \leq 10$ を示せ。
(3) $k \geq 4$ を示せ。(4) $n(n+24)$ という形をした平方数をすべて求めよ。

3 p を素数、 n を正の整数とすると、 $(p^n)!$ は p で何回割り切れるかを考えるとき、次の問いに答えよ。【京大 改】

- (1) 1, 2, 3, $\dots, p^n$ の中に、 $p^k (1 \leq k \leq n)$ で割り切れる整数は何個あるか。
(2) 1, 2, 3, $\dots, p^n$ の中に、 $p^k (1 \leq k \leq n-1)$ で割り切れるが、 $p^{k+1} (1 \leq k \leq n-1)$ では割り切れない整数は何個あるか。
(3) $p^k (1 \leq k \leq n-1)$ で割り切れるが、 $p^{k+1} (1 \leq k \leq n-1)$ では割り切れない整数すべてによって、 $(p^n)!$ は p で何回割り切れるか。
(4) (3)を利用して、 $(p^n)!$ は p で何回割り切れるかに答えよ。

4 p を素数、 n を正整数とし、1 から p^n までの自然数の集合を $I_n = \{1, 2, 3, \dots, p^n\}$ とおく。自然数 $l (1 \leq l \leq n)$ に対して、 I_n に含まれる数で p^l の倍数の個数を c_l 、 I_n に含まれる数で p^l の倍数であるが、 p^{l+1} の倍数ではないものの個数を d_l とおく。次の問いに答えよ。【中央大 改】

- (1) $p=2, n=5$ のとき、 $c_l, d_l (l=1, 2, 3, 4, 5)$ の値を求めよ。
また、 2^k が 32 の階乗 $32!$ を割り切る最大の整数 k の値を求めよ。
(2) 一般の素数 p と一般の自然数 n に対して、 $c_l, d_l (1 \leq l \leq n)$ の値を、 $1 \leq l \leq n-1$ と $l=n$ の場合に分けて答えよ。
(3) 一般の素数 p と一般の自然数 n に対して、 p^k が p^n の階乗 $(p^n)!$ を割り切る最大の整数 k の値 (p と n の式) を求めよ。

5 自然数 n について、以下の問いに答えよ。【神戸大 改】

- (1) 恒等式 $(n^2+1) - (n+2)(n-2) = 5$ を利用して、 $n+2$ と n^2+1 の公約数は 1 または 5 に限ることを示せ。

(2) (1)を用いて、 $n+2$ と n^2+1 が1以外に公約数をもつような自然数 n をすべて求めよ。

6 ア、イ、ウ、エ、オにあてはまる数値を求めよ。【関西学院大】

(1) 133958×1134042 を計算すると、 $\boxed{\text{ア}}99\boxed{\text{イ}}$ となる。

(2) $1133958=1134000-42=(27000-1) \times 42$ であるから、 11338858 を因数分解したときに現れる素数を小さいものから並べると、2, 3, $\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$, $\boxed{\text{オ}}$ である。

7 不定方程式 $3x+5y=2009 \cdots \cdots \textcircled{1}$ について考える。

(1) $\textcircled{1}$ を満たす正の整数の組 (x, y) の個数を求めよ。

(2) $\textcircled{1}$ を満たす正の整数の組 (x, y) の中で、 $|x-y|$ が最小となる組 (x, y) を求めよ。【摂南大】

8 a, b, c が整数で、 $a^2+b^2=c^2$ であるとき、次のことを証明せよ。

(1) a または b は、3 の倍数である。

(2) a または b は、4 の倍数である。

6. 活動のようす

問題の下部に「感想欄」を設け、今回の実践の印象を書いてもらった。なお、生徒のヘルパー、サポーターとして私を含めて5人の教員があたった。

生徒の感想から

- 朝の課外でやっていたことが大いに役立って、理解が容易であった。また、課外で疑問に思っていたこと、どうしてこうなるのか？というパターンのときその解法なのか？ということがわかりやすく「20のツール」で知ることができた。この20パターンの成分をしっかり覚えていれば、新傾向や発展の問題でも応用が利いて入試でも対応できるだろうと思った。
- 今までずっと整数問題は苦手でしたが、今日の講義をきっかけに、整数問題が得意になりたいです。大学入試のことを考えると、整数問題の攻略は絶対に必要だと思いました。
- 通常授業では習わず入試には必要なものなので、この機会に修得することができてよかった。
- 合同式や不定方程式について知らなかったのですが、具体例を挙げてくわしい解説をして下さったおかげで、深く理解することができました。難関大学の過去問なんて、まだまだ手の届くレベルではないと思っていたのですが、20個のツールを用いれば、今の段階でも難しくなかったです。理数科に入って本当によかったなと思います。今回は、整数探究のみでしたが、機会があるなら他の分野についても研究したいです。
- 講義では、今まで習ったことの復習から難しい内容まで幅広くあったので、飽きることなく75分×2があつという間に終わりました。午後からの個人探究問題は、私の苦手な“証明問題”が当たったので、最初は戸惑いました。ですが、この問題を解くうちに、いろいろな規則性を探したので、解答には関係なかったけれど、新たな発見がたくさんありました。とても楽しかったし、うれしかったです。
- 先にツールを習ったことで、すらすらと解くことができた。
- 難しかったけど、すごくためになる授業だった。入試でもよく出る分野なので、よく復習しておきたいと思った。
- 日頃見慣れている整数の問題は、クイズをしているようでとてもおもしろいです。
- 難しい問題が多かったけど、先生に教えていただいたり、友達と考えたりして、何とか答えが出せたのでとてもスッキリすることができました。整数問題に対する理解が深まったと思います。
- 整数問題と一口に言っても、様々な種類の問題があることに驚いた。身近である整数を様々な視点から眺めてみると、とても奥が深いことに気付かされた。実際に考えてみると、とても面白い分野だと思った。ぜひ得意な分野にしたい。
- 背理法を使う問題はいくつかやったことがありましたが、ここまで難しい問題(29)は初めてでした。ま

ず、どういう仮定式を立てればよいか分らず、先生の力を借りてようやく最後までたどり着くことができました。1人で解くことはできませんでしたが、なぜこうなるのかを理解することができ、力を付けることはできたと思います。これからも、いろいろな問題にあたり、難しい問題を自力で解く達成感を味わってみたいと思います。

- 習ったことがないのに、入試で使うツールが、整数だけでこんなにあるのにはびっくりした。このような解き方を考えた数学者達はすごいと思いました。難関大の問題に、実際に触れられてとても役立ちましたし、西元先生のパソコンを用いた分かりやすい講義で、1年の復習(背理法など)や更に上のテクニック・ツールを理解することができました。

個別探究のようす



個別探究の例

平成22年度理数科課題研究 探究数学「整数探究」個人探究問題

2年次 理数科 1組 ()番 氏名()

23 (1) 方程式 $\left[\frac{3n+2}{7}\right]=0$ を満たす自然数 n を求めよ。

$\left[\frac{3n+2}{7}\right]$ は 0 を超えない最大の整数を表すから

$$0 \leq \frac{3n+2}{7} < 1$$

$$0 \leq 3n+2 < 7$$

$$-2 \leq 3n < 5$$

$$-\frac{2}{3} \leq n < \frac{5}{3}$$

よって方程式 $\left[\frac{3n+2}{7}\right]=0$ を満たす n の範囲は $-\frac{2}{3} \leq n < \frac{5}{3}$ である。

求める n は自然数である。 $\therefore n = 1$

(2) 実数 x, y に対して、 $[x+y] - [x] - [y]$ の値を求めよ。

$x = [x] + \alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$)

$y = [y] + \beta$ ($0 \leq \beta < 1$) とおく。

$0 \leq \alpha + \beta < 2$ より、2つの場合にわけらる。

(i) $0 \leq \alpha + \beta < 1$ のとき $[x+y] = [x] + [y]$ となる。

$$[x+y] - [x] - [y] = 0$$

(ii) $1 \leq \alpha + \beta < 2$ のとき $[x+y] = [x] + [y] + 1$ となる。

$$[x+y] - [x] - [y] = 1$$

(i), (ii) より、実数 x, y に対して、 $[x+y] - [x] - [y]$ の値は $0, 1$ である。

*探究数学「整数探究」について感想を書いてください。

難しい問題が多かったけど、先生に教えていただいたり、友達と考えたりして、何とか答えが出せたので、とてもスッキリすることができました。整数問題に対する理解が深まったと思います。

班別探究のようす



班別探究の例

平成22年度理数科課題研究 探究数学「整数探究」班別探究問題

()班 氏名()

- 4 p を素数, n を正整数とし, 1 から p^n までの自然数の集合を $I_n = \{1, 2, 3, \dots, p^n\}$ とおく. 自然数 $l (1 \leq l \leq n)$ に対して, I_n に含まれる数で p^l の倍数の個数を c_l , I_n に含まれる数で p^l の倍数であるが, p^{l+1} の倍数ではないものの個数を d_l とおく.

次の問いに答えよ.

【中央大 改】

- (1) $p=2, n=5$ のとき, $c_l, d_l (l=1, 2, 3, 4, 5)$ の値を求めよ.
また, 2^k が 32 の階乗 $32!$ を割り切る最大の整数 k の値を求めよ.
- (2) 一般の素数 p と一般の自然数 n に対して, $c_l, d_l (1 \leq l \leq n)$ の値を, $1 \leq l \leq n-1$ と $l=n$ の場合に分けて答えよ.
- (3) 一般の素数 p と一般の自然数 n に対して, p^k が p^n の階乗 $(p^n)!$ を割り切る最大の整数 k の値 (p と n の式) を求めよ.

$$\begin{array}{ll}
 (1) & c_1 = 2^{5-1} = 16 & d_1 = c_1 - c_2 = 8 \\
 & c_2 = 2^{5-2} = 8 & d_2 = c_2 - c_3 = 4 \\
 & c_3 = 2^{5-3} = 4 & d_3 = c_3 - c_4 = 2 \\
 & c_4 = 2^{5-4} = 2 & d_4 = c_4 - c_5 = 1 \\
 & c_5 = 2^{5-5} = 1 & d_5 = 1
 \end{array}$$

$$k = 1 \times d_1 + 2 \times d_2 + 3 \times d_3 + 4 \times d_4 + 5 \times d_5$$

$$= 8 + 8 + 6 + 4 + 5 = 31$$

$$\underline{k = 31}$$

- (2) $p=2, n=5$ とおいた (1) の結果より $c_l = 2^{5-l}$ と表せる.
一般に 素数 p , 正整数 n の場合は $c_l = p^{n-l}$

また (1) の結果より $d_l = c_l - c_{l+1}$ といえる.

したがって

(i) $1 \leq l \leq n-1$ のとき.

(ii) $l=n$ のとき

$$c_l = p^{n-l}$$

$$c_l = p^{l-l} = p^0 = 1$$

$$\begin{aligned}
 d_l &= c_l - c_{l+1} \\
 &= p^{n-l} - p^{n-(l+1)} \\
 &= p^{n-l} - p^{n-l-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_l &= c_l - c_{l+1} \\
 p^{n+1} &\text{は } I_n \text{ に含まれないから} \\
 d_l &= p^0 - 0 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad k &= \sum_{i=1}^{n-1} i d_i + n \cdot c_n \\
 &= 1 \cdot d_1 + 2 \cdot d_2 + 3 \cdot d_3 + \cdots + (n-1) \cdot d_{n-1} + n c_n \\
 &= (c_1 - c_2) + 2(c_2 - c_3) + 3(c_3 - c_4) + \cdots \\
 &\quad \cdots + (n-1)(c_{n-1} - c_n) + n c_n \\
 &= c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_{n-1} + c_n \\
 &= p^{n-1} + p^{n-2} + p^{n-3} + \cdots + p + 1 \\
 &= \frac{1(p^n - 1)}{p - 1} \\
 &= \frac{p^n - 1}{p - 1}
 \end{aligned}$$

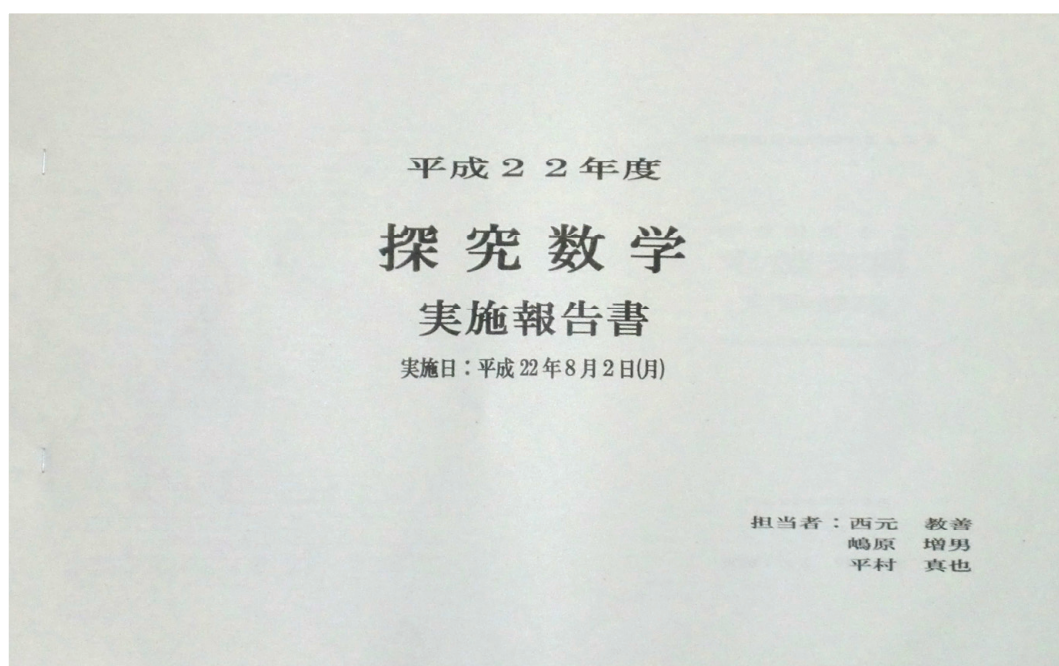
7. 探究数学実施報告書

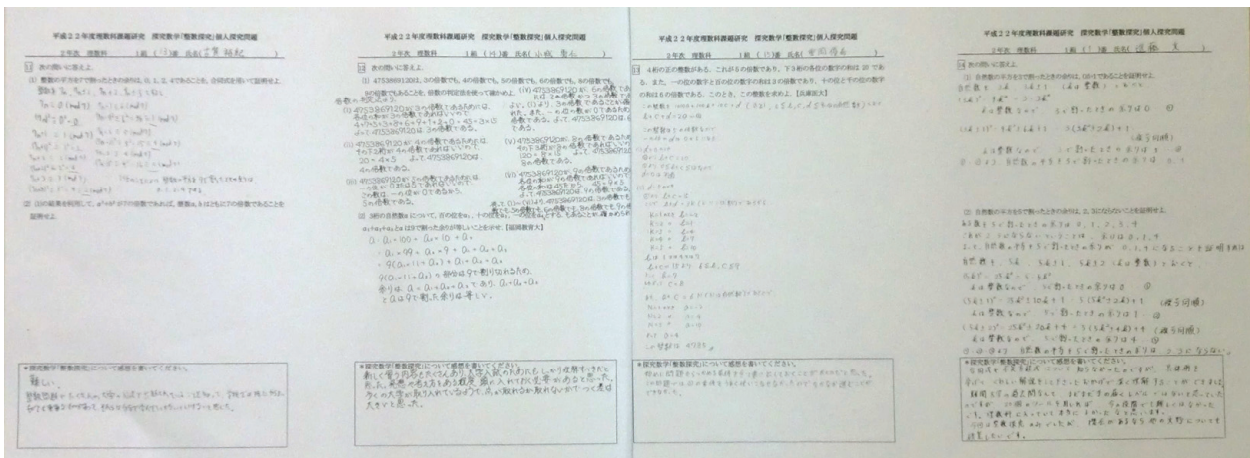
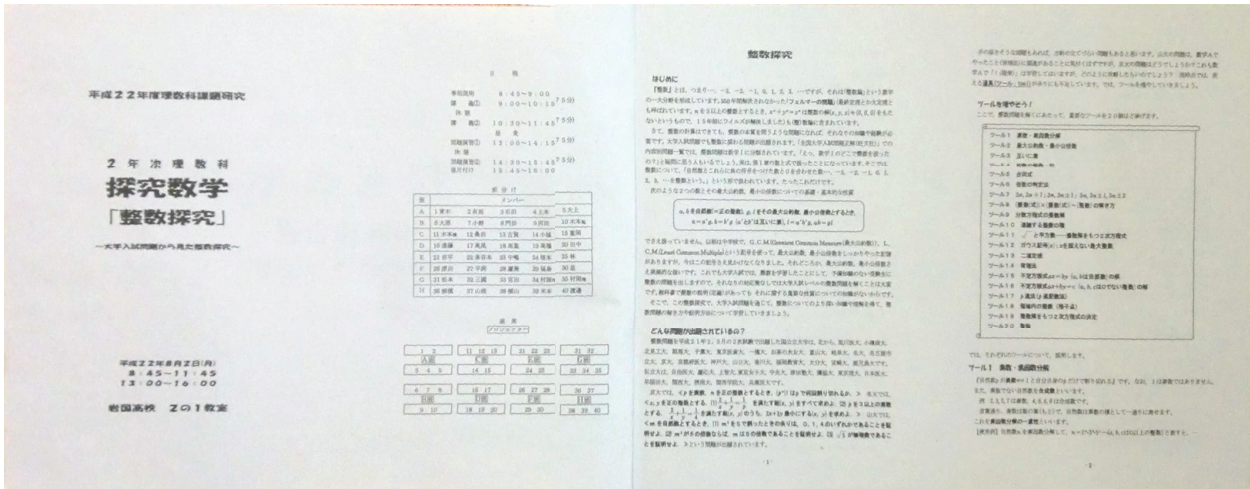
生徒の解答は個別・班別ともに回収して、B5サイズに縮小してB4用紙に2名分の解答が掲載できるようにして両面印刷した。また、活動のようすについてもデジカメに撮ったので、それも掲載した。全部で19枚になったが、それをホッチキスで留めて1冊の実施報告書とした。

80部作成し、40部は生徒に配布、また、県内には理数科設置高校が6校あるので、その会議の際の配布用として、20冊は理数科に渡した。残りは数学科教員14名に配布した。

実施の翌日に配布したことで、生徒は驚いていたようであったが、急いで印刷した理由には、テストの反省と同じで、早いほうが理解の定着に繋がること、また、他人がどのような問題をどのように解いているかにも関心があるはずという思いで、記憶に新しいときに配布する方が、教育的効果があるように判断したからである。

探究数学実施報告書





8. おわりに

「全国大学入試問題正解(旺文社)」で、大学入試に出題されている整数問題を調べ、このレベルの問題が解けるようになるにはどのような知識が必要であるか、ということから20個のツールを抽出し、それを使ってその問題をパワーポイントで丁寧に説明したので、生徒から概ね良好な評価を得た。

また、講義を聴講する本校教員がいたこと、問題演習時の指導、配布した「探究数学実施報告書」にさっそく興味・関心を持ってもらったことを鑑みて、生徒だけでなく、教員にとっても有意義な課題研究(数学探究)であったと思う。本校の理数科教育として、長年にわたって実施している行事であるので、今後も題材やプレゼン等を改良し、生徒・教員の双方にとって効果的な実践となるよう努力したい。