

不定方程式の特殊解と二進法の計算

1. はじめに

新課程数学Aで「整数の性質」が新たに追加された。

その中でもユークリッドの互除法が「参考」, 「発展」扱いから正式な項目となった。

ユークリッドの互除法自体は拙者自身が高1で履修をしていたので面食らうということではなく, どちらかと云えば本採用歓迎派である。

また, 記数法もデジタル時代到来に相応しい項目であるため, この2つについて解法, 解説で特に強調した点を生徒の反応を交えて紹介したい。

2. 内容その1【ユークリッドの互除法を用いた不定方程式の特殊解】

特殊解の求め方は, 色々あり, また, ユークリッドの互除法の記法も何通りもある。生徒に指導して生徒の反応が最も良かった方法を紹介したい。

例題1 不定方程式 $29x+13y=1$ の特殊解を一組求めよ。(啓林館教科書数学A p.97)

$$\begin{array}{r} 13) 29 \quad 2 \\ \underline{26} \\ 3) 13 \quad 4 \\ \underline{12} \\ 1 \end{array}$$

x,y 係数は互いに素であるので, 余りが1になったところで終わる。
このときの商を用いて a,b に対して同様の計算を行う。最後の a,b の係数が特殊解である。

$$\begin{array}{r} b) a \quad 2 \\ \underline{2b} \\ a-2b) \quad b \quad 4 \\ \underline{4a-8b} \\ -4a+9b \end{array}$$

検算)

$$29 \times (-4) + 13 \times 9 = -116 + 117 = 1$$

よって, 確かめられた。

問 35 (1)不定方程式 $51x+16y=1$ の特殊解を一組求めよ。

$$\begin{array}{r} 16) 51 \quad 3 \\ \underline{48} \\ 3) 16 \quad 5 \\ \underline{15} \\ 1 \end{array}$$

x,y 係数は互いに素であるので, 余りが1になったところで終わる。
このときの商を用いて a,b に対して同様の計算を行う。最後の a,b の係数が特殊解である。

$$\begin{array}{r} b) a \quad 3 \\ \underline{3b} \\ a-3b) \quad b \quad 5 \\ \underline{5a-15b} \\ -5a+16b \end{array}$$

検算)

$$51 \times (-5) + 16 \times 16 = -255 + 256 = 1$$

よって, 確かめられた。

(2)不定方程式 $17x - 24y = 2$ の特殊解を一組求めよ。

$$\begin{array}{r}
 17) 24 \quad 1 \\
 \underline{17} \\
 7) 17 \quad 2 \\
 \underline{14} \\
 3) 7 \quad 2 \\
 \underline{6} \\
 1
 \end{array}$$

x, y 係数は互いに素であるので、余りが1になったところで終わる。
 このときの商を用いて a, b に対して同様の計算を行う。
 最後の a, b の係数が特殊解である。

$$\begin{array}{r}
 b) a \quad 1 \\
 \underline{b} \\
 a-b) \quad b \quad 2 \\
 \underline{2a-2b} \\
 -2a+3b) a -b \quad 2 \\
 \underline{-4a+6b} \\
 5a-7b
 \end{array}$$

検算)

与式の右辺が2であるから5, -7をそれぞれ2倍して与式に代入すると、

$$17 \times (-14) - 24 \times (-10) = -238 + 240 = 2$$

よって確かめられた。

a, b の係数がそのまま、 x, y の特殊解とは限らない点は、戸惑うところであるが、大方の生徒は、この方法で理解できたようだ。

3. 内容その2 (二進法とデジタル)

$11010_{(2)}$ を十進数に変換するには、通常は、

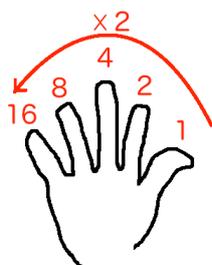
$$\begin{array}{r}
 16 \ 8 \ 4 \ 2 \ 1 \\
 \times \times \quad \times \\
 11010 \\
 \downarrow \downarrow \downarrow \\
 16 + 8 + 2 = 26
 \end{array}$$

生徒には、元々、デジタルとは指で数えることであることを教え指を折って二進数を十進数に変換する方法を指導した。

私の場合、指を折ったときが1で、指を立てているときを0としている。

「ビットを立てる」という云い方に従えば指を立てたときを1とした方がいいのだが、グーの状態から薬指を1本だけ立てるのはかなり窮屈である。そのため、折る、立てるを反対にしている。

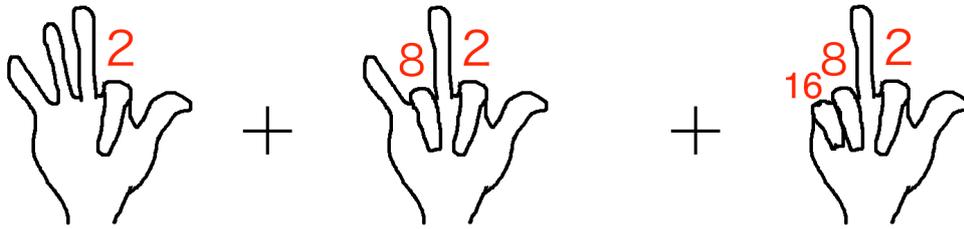
この方法を用いて、二進数を指を折って十進数に変換する方法を指導した。



左図のように、右手の親指を1として、小指までの4本を2倍ずつした数であることを教え、次の手順で二進数の $11010_{(2)}$ を十進数に直してみせた。

小	人
差	差
指	指
↓	↓
↓	↓
1	1
0	0
1	0

左の対応から、3本の指を順番に折りながら、加算をしていく。



「2 足す 8 で 10，16 を足して，26」

と示したところ、生徒は強い興味を示した。当然、1回で理解できた生徒とそうでない生徒がいるが、理解できた生徒は得意になって周囲の生徒に説明をしていた。

特に、普段から数学が好きではない生徒ほど、このときとばかりに得意となっていたのが印象的であった。

3. まとめ

私は、普段から数学を言葉で覚えさせることを強調して指導している。

例えば、標準偏差の式を覚えさせるときは、

「得点から平均点を引いたのが、偏差」

「そして、偏差の2乗の平均が分散」

「更に、分散の正の平方根が標準偏差だ」

という具合に、実際の計算手順に沿いながら言葉で理解、記憶させている。

その点で、指を折って（デジタル）で数え上げる方法は、アクションを伴うことから、生徒の興味関心定着が良好であった。