重心の位置とパップス=ギュルダンの定理

熊本県立熊本高等学校　小坂　和海

1．はじめに

センター試験後の3年生対象の特別授業は，志望大学別に3コースに分けて行っているが，最も学力の高い生徒が集まるコースで，「重心の位置とパップス=ギュルダンの定理」を扱い，次のような入試問題を解くことを試みた．回転体の体積を求める場面で，別解として，半円の重心の位置を求め，パップス=ギュルダンの定理を用いる解法を解説した．

2．扱った入試問題

（2011筑波大学）

α を $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。円 $C: x^2+(y+\sin\alpha)^2=1$ および，その中心を通る直線 $\ell: y=(\tan\alpha)x-\sin\alpha$ を考える。

(1)　直線 ℓ と円 C の2つの交点の座標を α を用いて表せ。

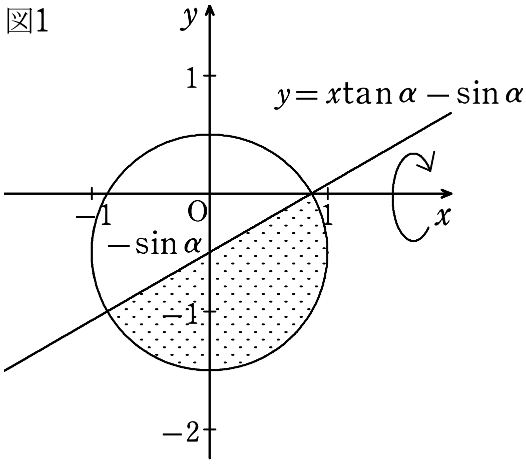
(2)　等式 $2\displaystyle\int_{\cos\alpha}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$ が成り立つことを示せ。

(3)　連立不等式 $\begin{cases} y\leqq(\tan\alpha)x-\sin\alpha \\ x^2+(y+\sin\alpha)^2\leqq 1 \end{cases}$ の表す xy 平面上の図形を D とする。図形 D を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

3．解法解説の概要

(3)の立体は，図 1 の打点部分を軸の周りに回転させたものであるから，パップス=ギュルダンの定理を使うには，半円の重心の位置を知る必要がある．

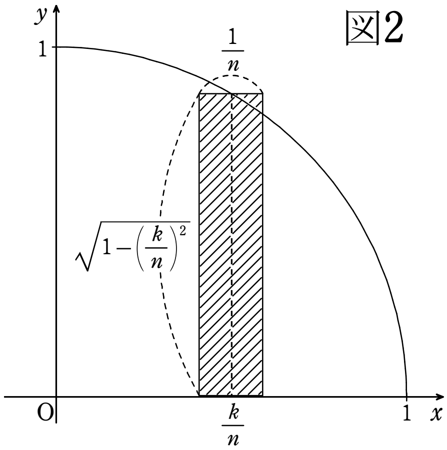
図1



まず，x 軸上の区間 $[0,\ 1]$ を n 等分し，各区間に図 2 のような面積 $\dfrac{1}{n}\sqrt{1-\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}$

$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ の長方形をつくる．

図2



この長方形の重心の y 座標は $\dfrac{1}{2}\sqrt{1-\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}$ であるから，重心の y 座標とその長方形の

面積をかけて足し合わせたもの，すなわち，

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right\}$$

を考える．この式で $n\to\infty$ のときの極限は，定積分を用いて，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x^2)dx=\frac{1}{2}\left[1-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

と求められるので，4 分円の面積 $\dfrac{\pi}{4}$ で割って，重心の y 座標は $\dfrac{4}{3\pi}$ である．

半円 $x^2+y^2\leqq 1,\ y\geqq 0$ は y 軸に関して対称であるから，その重心の座標は $\left(0,\ \dfrac{4}{3\pi}\right)$ である．

さて，重心の位置がわかったので，回転体の体積を求めよう．直線ℓの法線ベクトル$(\sin\alpha,\ -\cos\alpha)$を用いて，図形$D$の重心 G の位置は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=(0,\ -\sin\alpha)+\frac{4}{3\pi}\cdot(\sin\alpha,\ -\cos\alpha)=\left(\frac{4}{3\pi}\sin\alpha,\ -\sin\alpha-\frac{4}{3\pi}\cos\alpha\right)$$

と求められるので，Gのy座標を用いて，求める立体の体積は

$$\frac{\pi}{2}\cdot 2\pi\left(\sin\alpha+\frac{4}{3\pi}\cos\alpha\right)=\pi^2\sin\alpha+\frac{4}{3}\pi\cos\alpha$$

であることがわかる．

4．生徒の反応など

授業では生徒に答案を板書させ，教師がそれにコメントを加えていくのだが，生徒が板書した解法は当然（1）→（2）→（3）の誘導に沿ったものであり，それをまず素材として解説した後に別解を補足した．65 分の授業中に，他に 3 問扱ったので，この問題に割ける時間は余りなく，どうしてもポイントだけを指摘して終わることになる．しかし，予習の段階で正解に達している生徒が多くいて，余裕があったためか，別解もよく理解できていたようである．

5．おわりに

大学入試の答案としてパップス=ギュルダンの定理が使えるのか，とか，重心の位置を知識として使うことはいいのか，とかいった課題はあるが，数学Ⅲの学習の自然な発展として，積分法への理解を深めるきっかけとして，有意義な教材ではないかと思う．これまでは，重心の位置が容易にわかるもの，例えば，「2 つの放物線$y=x^2-2x$，$y=-x^2+6x-4$で囲まれた部分」（重心は点$(2,\ 2)$とすぐにわかる）を回転させるなどの場合に，積分による求積計算の検算としてパップス=ギュルダンの定理を使うことがあったが，単なる受験の裏技として済ませてしまうのはもったいないのではないだろうか．

なお，半円$x^2+y^2\leqq r^2$，$y\geqq 0$をx軸の周りに回転させるとき，パップス=ギュルダンの定理から，

（半円の面積）×（半円の重心の描く円周の長さl）＝（球の体積）

であるから，$\frac{\pi r^2}{2}\times l=\frac{4}{3}\pi r^3$ となり，$l=\frac{8}{3}r$が得られ，重心のy座標は$y=\frac{l}{2\pi}=\frac{4r}{3\pi}$である．