４．生徒研究論文

素数の分布

Abstract

Prime numbers have only two divisors; one and itself. Our group decided to investigate it using three methods because it is said that prime numbers have no regularity except for the “Riemann Hypothesis”.

The concept of Euler’s function made it possible to research “the number of prime numbers.” The result indicated how many prime numbers exist between zero and a natural number, N. Expanding the Fibonacci sequence and formulating each polynomial expression’s term, it was found that the result terms of prime-numbers don’t resolve into factors. By adding a term and the next term of prime progression and finding the greatest common measure (G.C.M.) of the two terms of new progression, the result most common was two or six. The conclusion is that prime numbers seem to have a lot of regularities.

１．はじめに

素数とは，約数が２個であるような数のことである．素数は無数にあることが証明されているが，素数定理$\pi_{(N)} \fallingdotseq \frac{N}{\log N}$を用いると，ある自然数 N までに存在する素数の個数の近似値を求めることができる．しかし，自然数 N を大きくすると，求められる近似値は，真の素数の個数との差が大きくなる．そこで，包除原理を利用して，素数定理より誤差の小さい近似式を作成することを試みた．

２．方法

(1)　1～30 の自然数のうち，素数の個数を『エラトステネスの篩 』により求める．このとき，消去する数は$\sqrt{30}$以下の素数 2，3，5 の倍数である．

① 2,3,5 自身は素数だから，これら以外の 2，3，5 の倍数を除く．

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~

② 1 は素数ではないから 1 を除き，残った数を○で囲む．

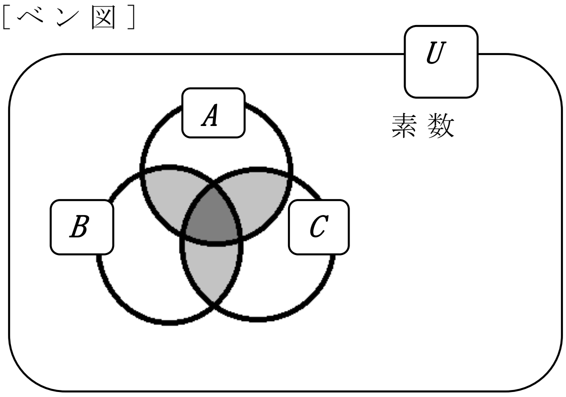
~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~

よって，1～30 の自然数うち，素数は 10 個である．

これを計算によって求める．ここで U を 1～30 の自然数の集合，A を 2 の倍数の集合，B を 3 の倍数の集合，C を 5 の倍数の集合としてベン図で表すと，次のようになる．ただし，2，3，5 自身は集合 A，B，C には含まない．

また，1～30 の自然数のうち，n の倍数を $\mathrm{S}_{(n)}$ とする．

［ベン図］



（①で除いた数）＝ $\mathrm{S}_{(2)}+\mathrm{S}_{(3)}+\mathrm{S}_{(5)}-\mathrm{S}_{(6)}-\mathrm{S}_{(10)}-\mathrm{S}_{(15)}+\mathrm{S}_{(30)}$ －3

$=\frac{30}{2}+\frac{30}{3}+\frac{30}{5}-\frac{30}{6}-\frac{30}{10}-\frac{30}{15}+\frac{30}{30}$ －3

＝ 15 ＋ 10 ＋ 6－ 5－ 3－ 2 ＋ 1－ 3

＝ 19

1 は素数ではないので，1 を除くと，①と合わせて除いた数は
19＋1＝20（個）．

よって 1～30 の自然数のうち，素数は $30-20=10$（個）となる．

以上の計算をまとめると

$$\pi_{(30)}=30-\left(\mathrm{S}_{(2)}+\mathrm{S}_{(3)}+\mathrm{S}_{(5)}-\mathrm{S}_{(6)}-\mathrm{S}_{(10)}-\mathrm{S}_{(15)}+\mathrm{S}_{(30)}\right)+3-1$$

$$=30-\left(\frac{30}{2}+\frac{30}{3}+\frac{30}{5}-\frac{30}{6}-\frac{30}{10}-\frac{30}{15}+\frac{30}{30}\right)+3-1\ldots(a)$$

$$=30-(15+10+6-5-3-2+1)+3-1$$

$$=10(\text{個})$$

となる．

ここで（a）を変形すると，

$$(a)=30\left\{1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{10}-\frac{1}{15}+\frac{1}{30}\right)\right\}+3-1$$

$$=30\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{15}\left(1-\frac{1}{2}\right)\right\}+3-1$$

$$=30\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{15}\right)+3-1$$

$$=30\left(1-\frac{1}{2}\right)\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{3}\right)\right\}+3-1$$

$$=30\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)+3-1$$

となり，一部，因数分解ができる．さらに，素数 2，3，5，…，p のときも同様に因数分解ができる．

(2)　以上の考え方を一般化すると，次のようになる．

$\pi_{(n)} \fallingdotseq [n\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p}\right)]+q-1$　（［　］はガウス記号）

$$=\left[\underline{n\prod_{p:素数}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\right]+\underline{q-1}$$

$$=[nx]+y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(b)}$$

($p \leqq \sqrt{n}$とし，qはこれを満たす素数の個数)

このとき，分数計算が煩雑なので計算の簡略化をおこなう．下線部を x，y とおいて計算し，［表 1］を作成した．

［表 1］

n	X	y	n	x	y
２~８	０．５０…	0	１６９~２８８	０．１９…	5
９~２４	０．３３…	1	２８９~３６０	０．１８…	6
２５~４８	０．２７…	2	３６１~５２８	０．１７…	7
４９~１２０	０．２３…	3	５２９~８４０	０．１６…	8
１２１~１６８	０．２１…	4	８４１~９６０	０．１６…	9

1～30 の自然数のうち，素数の個数を求めるには，n＝30 より［表 1］から x = 0.27，　y = 2 を(b)式に代入して，

$\pi_{(30)} \fallingdotseq [30\times 0.27]+2=10$

よって，　1～30 の自然数のうち，素数の個数は 10 個となる．

３．結果・考察

nが１～10^8では素数定理の値より,(b)式の値のほうが誤差は小さく,10^9～10^{10}では素数定理の値のほうが(b)式の値より誤差は小さい.

また,(b)式のxはnが増加するにしたがって,一定の値に収束する.つまり,(b)式はnについての一次関数とみなすことができる.したがって,真の素数の個数がゆるやかに増加するのに対し,(b)式は直線的に増加する.ゆえに,nが10^{10}より大きな値をとるとき,(b)式の誤差は,さらに大きくなると予想される.

４．今後の課題

この研究では「エラトステネスの篩」を用いて,近似式を求めたが,曲線を直線で近似するのは難しい.よって,新たな発想で,より精度の高い素数の個数の近似式を作成することが今後の課題である.

今回は10^{10}までの実験であるが,詳しく近似式の誤差について考察するために,より多くの実験を行う必要がある.また素数は,素数をある数で割った剰余で分類されることがある.その素数はan+b型素数として表されるので,その型について,素数の個数の近似式を作成していきたい.

５．参考文献

(1)　マスター・オブ・整数　（東京出版）

(2)　数学ワンポイント双書(10)　整数　（共立出版）

５．おわりに

物理，化学，生物，地学分野は具体的な実験ができるのに対して，数学分野は先が見えない。果たして，１月のクラス内発表で，結果が残せるのだろうかという強烈な不安の元，課題研究が始まった。

夏休みに，地域アドバイザーの方から，「実験数学」を学んだ。実験を通して，自分自身で課題を設定し，自ら研究を進めていくという基本姿勢を学んだことによって，研究が少しずつ進んだように思う。

生徒は，高校数学の知識を用いて，素数について研究していった。その点では大いに評価できる。純粋な高校生の視点には，驚かされることが多々あった。この「実験数学」という考え方は，すべての分野に通じるもので，これからの生徒の未来に繋がっていくものだと確信している。