生徒の疑問を活かした実践―正接定理をつくろう―

山口県立岩国高等学校　　西元　教善

１．はじめに

三角比には３種類，つまり正弦，余弦，正接があり，正弦と余弦にはそれぞれ「正弦定理」「余弦定理」と呼ばれる定理があるのに，なぜ正接だけ「正接定理」はないのか？……生徒からよく受ける質問である。そこで，このような生徒が自然に抱く素朴な疑問を活かした実践を行ってみた。

２．ねらい

生徒が抱く素朴な疑問を生徒自ら解決をしていく問題解決学習をグループ学習という形態で実践し，三角比の理解を深めることをねらいとした。

三角比の相互関係，正弦定理，余弦定理，面積の公式（ヘロンの公式，$\mathrm{S}=sr$ （$2s=a+b+c$，rは△ABCの内接円の半径)，$\mathrm{S}=\dfrac{abc}{4\mathrm{R}}$ (Rは△ABCの外接円の半径)を含む）を駆使して，$\tan\mathrm{A}, \tan\mathrm{B}, \tan\mathrm{C}$ を，$a, b, c, r, \mathrm{R}, \mathrm{S}$ を使って表す。必ずしも$\tan\mathrm{A}=\cdots$ という形でなくてもよく，$a, b, c, r, \mathrm{R}, \mathrm{S}$ と$\tan\mathrm{A}, \tan\mathrm{B}, \tan\mathrm{C}$ の関係式であればよいとした。見掛けが違えば，別物とみなし，複数のいわゆる「正接定理」を作らせる。その目的は，これまでの三角比に関わる数学的事実の確認（復習）をさせて，新しい数学的事実を自ら発見する過程の中でその定着を図り，何よりも数学する楽しさを経験させて，数学により興味・関心を起こさせることである。

３．実践方法について

後掲のプリント『「正接定理」を作ってみよう』を配布し，一人ひとりの生徒がそのプリント（Ａ４版）を読み，提出用紙（Ａ４版）に探究活動の記録と自分で作った「正接定理」をいくつか記入する。

個人探究の時間が１５分間，解決の糸口が見つからない生徒のためのヒントの提示が５分間，５名程度までのグループでの探究時間が３０分間である。

４．実践中のようす

個人探究の時間は黙ってようすを見ていた。見当のつかない生徒も多かったが，１５分間は生徒の試行錯誤にまかせた。１５分後，「正弦定理」を変形して $\sin\mathrm{A}$ をa, R で表した式「$\sin\mathrm{A}=\dfrac{a}{2\mathrm{R}}$」と「余弦定理」を変形して$\cos\mathrm{A}$ をa, b, c で表した式 $\cos\mathrm{A}=\dfrac{b^2+c^2+a^2}{2bc}$ を，三角比の相互関係 $\tan\mathrm{A}=\dfrac{\sin\mathrm{A}}{\cos\mathrm{A}}$ に代入すれば，１つできることを説明した。

また，$\sin\mathrm{A}, \cos\mathrm{A}$ は$0^\circ<\mathrm{A}<180^\circ$ のとき，そのすべての角に対してその値があるが，$\tan\mathrm{A}$ は$\mathrm{A}=90^\circ$ のときには値が存在しないこと，それは辺の長さでは$a^2=b^2+c^2$のときであること，したがって，「正接定理」を考えるときには，「$\mathrm{A}\fallingdotseq 90^\circ, \mathrm{B}\fallingdotseq 90^\circ, \mathrm{C}\fallingdotseq 90^\circ \Longleftrightarrow a^2\fallingdotseq b^2+c^2, b^2\fallingdotseq c^2+a^2, c^2\fallingdotseq a^2+b^2$」であることを注意した。式変形に夢中で，そのことに気付いていなかったからである。

その後，グループで考えてよいことを指示した。個人で頑張る者もいれば，最大５人のグループを作り和気あいあいとアイデアを出し合って，解決に向け努力する者もいた。グループでの学習効果は，スーパーサイエンスハイスクール，理数科課題研究などを通じて実感していたので，個人である程度までレディネスを作っておき，それをグループで持ち寄って解決するスタイルをとった。

机間巡視しながら，生徒からの質問に答え，見守る姿勢をとった。良いアイデアや解決の糸口が見つかると歓声が起こった。押しつけられた勉強ではなく，やってみたい，解いてみたいという気持ちがあったからである。それは，生徒の感想の中にも生き生きと書かれている。

５．回収したプリントから

生徒の作った定理と感想をいくつか紹介しておく。プリントを回収後，事前に用意していた解答例を配布した。「こんな式になるか！」という驚きの声もあったが，回収したプリントには私自身見落とした式もあって，一本とられた感じがあった。今後の学習に向けてもよい復習の機会と発見学習になったと思う。

⑴　生徒の作った「正接定理」の一例

- $\tan\mathrm{A}=\dfrac{abc}{(b^2+c^2-a^2)\mathrm{R}},\ \tan\mathrm{B}=\dfrac{abc}{(c^2+a^2-b^2)\mathrm{R}},\ \tan\mathrm{C}=\dfrac{abc}{(a^2+b^2-c^2)\mathrm{R}}$

  $(\ \mathrm{R}(b^2+c^2-a^2)\tan\mathrm{A}=\mathrm{R}(c^2+a^2-b^2)\tan\mathrm{B}=\mathrm{R}(a^2+b^2-c^2)\tan\mathrm{C}\ )$
- $\tan^2\mathrm{A}=\dfrac{a^2}{4\mathrm{R}^2-a^2},\ \tan^2\mathrm{B}=\dfrac{b^2}{4\mathrm{R}^2-b^2},\ \tan^2\mathrm{C}=\dfrac{c^2}{4\mathrm{R}^2-c^2}$
- $r=\tan\mathrm{A}\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2(a+b+c)}=\tan\mathrm{B}\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2(a+b+c)}=\tan\mathrm{C}\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2(a+b+c)}$
- $\dfrac{a}{\tan\mathrm{A}}=\mathrm{R}\dfrac{b^2+c^2-a^2}{bc},\ \dfrac{b}{\tan\mathrm{B}}=\mathrm{R}\dfrac{c^2+a^2-b^2}{ca},\ \dfrac{c}{\tan\mathrm{C}}=\mathrm{R}\dfrac{a^2+b^2-c^2}{ab}$
- $1+\tan^2\mathrm{A}=\dfrac{4b^2c^2}{(b^2+c^2-a^2)^2},\ 1+\tan^2\mathrm{B}=\dfrac{4c^2a^2}{(c^2+a^2-b^2)^2},\ 1+\tan^2\mathrm{C}=\dfrac{4a^2b^2}{(a^2+b^2-c^2)^2}$

  $\tan\mathrm{A}=\dfrac{4\mathrm{S}}{b^2+c^2-a^2},\ \tan\mathrm{B}=\dfrac{4\mathrm{S}}{c^2+a^2-b^2},\ \tan\mathrm{C}=\dfrac{4\mathrm{S}}{a^2+b^2-c^2}$
- $\left(\begin{array}{l}\mathrm{S}=\dfrac{\tan\mathrm{A}(b^2+c^2-a^2)}{4},\ \mathrm{S}=\dfrac{\tan\mathrm{B}(c^2+a^2-b^2)}{4},\ \mathrm{S}=\dfrac{\tan\mathrm{C}(a^2+b^2-c^2)}{4}\\ a^2=b^2+c^2-\dfrac{4\mathrm{S}}{\tan\mathrm{A}},\ b^2=c^2+a^2-\dfrac{4\mathrm{S}}{\tan\mathrm{B}},\ c^2=a^2+b^2-\dfrac{4\mathrm{S}}{\tan\mathrm{C}}\end{array}\right)$

⑵　生徒の感想

（男子）これまで習った公式をあらゆる所で活かして，１つの正接定理を作り上げげた。これまでは$\tan\theta$については深く考えず，$\sin\theta$や$\cos\theta$を求めれば，公式$\boxed{1}\tan\mathrm{A}=\dfrac{\sin\mathrm{A}}{\cos\mathrm{A}}$に当てはめて求められるぐらいにしか思っておらず，今日，新たな公式が発見できてよかった。

（男子）変形をすることで簡単に作ることができた。でも，難しい式ができるばかりで，正弦定理や余弦定理を使った方が簡単に問題を解くことができるので，正接定理はないのだろうと思った。

（男子）既存の定理や公式から，新たな定理や公式を導き出すことも面白いと思いました。考えている途中で計算が元の式に戻ってしまったり，左辺と右辺が同じ式同士になったりして難しいと思いました。数学者はこういう取組から，新しくて，教科書に載るような定理や公式を考え出すのかなと思いました。

（女子）今までひそかに正接定理は何でないんだろうと思っていたので，今回の作業はとても楽しかったです。えっ！まじで？！というような式も生まれてきて，かなり新たな発見もしてしまいました。

（男子）今日の探究活動をやって，ちょっとあいまいになっていた公式を全部思い出せたので，よい刺激になりました。いろいろと試行錯誤できてよかったと思います。また機会があればやってみたいです。

（女子）いろいろな公式を組み合わせると，さらに違ったことを表す式が作れるんだと面白く感じました。基本的な公式が発展的な公式のもとになっているということがわかったので，基本はやはり大切だと思いました。難しい公式を作った昔の人はとてもすごいと思いました．また機会があれば他の分野でも公式作りに挑戦してみたいです。（タンジェントはひねくれ者だと思いました．きれいな公式が出てきませんでしたから･･･）

（男子）一応無理矢理作れたものはいくつかあったけど，自分で作ったものはややこしくて，使う気にはなれませんでした。公式を変形させて組み合わせると，新しい公式を導けるという知識と経験はこれからの数学の勉強において，役立つのではないかと思います。新しい公式を作る作業は意外と楽しくて，実際に使えそうなものがないか，見つけるのに夢中になりました。昔，公式を作った人達の気持ちがほんの少しわかったような気がしました。これからも暇なときは，役立ちそうな公式を作ってみたいと思います。

（女子）関係式を利用したり，定理を利用したりすることで様々な表現があることを実感できました。また，正弦定理や余弦定理，ヘロンの公式など，どれもシンプルにできているので，それを発見した人がどれほど苦労して，努力したのかがわかりました。数学は「積み重ねが大事」とよく言うけれど，確かに，互いに密接な関係があるので，そのことを再認識しました。

（男子）どういう風に変形していけば，「見た目」的に実用性のありそうなものに仕上げることができるかを考えるのが面白かった。自分では知らなかった発見なども，友達同士で話し合えたので理解がより深まった。このような研究も，数学の楽しさの一つだということがわかった。また機会があればやってみたいと思う。

（男子）自分で式変形したものをどんどん代入していったら，いろいろなものができけど，どれも無茶苦茶で，いろいろな公式を発見した偉大な数学者たちのすごさがわかった。あんなシャープで，すっきりした公式を導き出すのは大変なんだなと思った。

６．まとめ

仮に，“正接定理”と呼ぶ定理を作るとしたら，次のような⑴⑵⑶になるだろう。

正接定理　⑴　A, B, C のどれも直角でないとき，△ABC の外接円の半径をR とすると，

$$(b^2+c^2-a^2)\tan\mathrm{A}=(c^2+a^2-b^2)\tan\mathrm{B}=(a^2+b^2-c^2)\tan\mathrm{C}=\frac{abc}{\mathrm{R}}$$

正接定理　⑵　A, B, C のどれも直角でないとき，△ABC の内接円の半径をr とすると，

$$a^2=b^2+c^2-2r\frac{a+b+c}{\tan\mathrm{A}}\quad b^2=c^2+a^2-2r\frac{a+b+c}{\tan\mathrm{B}}\quad c^2=a^2+b^2-2r\frac{a+b+c}{\tan\mathrm{C}}$$

正接定理　⑶　A, B, C のどれも直角でないとき，$2s=a+b+c$ （三角形ＡＢＣの周の長さの半分をs ）とすると，

$$\tan\mathrm{A}=\frac{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{b^2+c^2-a^2}\quad \tan\mathrm{B}=\frac{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c^2+a^2-b^2}\quad \tan\mathrm{C}=\frac{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a^2+b^2-c^2}$$

確かに，正接定理と呼べる定理は考えられたが，これは満足のいく“○○定理”と呼ぶにふさわしい結果なのであろうか？　確かに，一見すると，正弦定理，余弦定理のように，小奇麗にまとめられている。しかし，「A, B, C のどれも直角でないとき」という制約があることも欠点であるが，なによりも最大の欠陥は，正弦定理，余弦定理のように実用的でないことである。だからといって，このような実践がむだということではない。生徒の感想から，数学教育的に効果のある実践であることが十分にわかるからである。

配布プリントについて

「正接定理」を作ってみよう

岩国高校理数科１年次　理数数学Ⅰ(数学Ⅰ)

数学Ⅰの三角比のまとめとして，次の問題を考えてみましょう。

問題

正接定理はないのか！？

ａ君は，三角比の勉強をしていて，ふと疑問に思うことがありました。
というのは，三角比には「正弦(サイン)」「余弦(コサイン)」「正接(タンジェント)」の３つあって，三角比の相互関係では，

$\boxed{1}$ $\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$　$\boxed{2}$ $\sin^2 A+\cos^2 A=1$　$\boxed{3}$ $1+\tan^2 A=\dfrac{1}{\cos^2 A}$

のように，「正接」もその中に入っています。

しかし，そのあと学んだように「正弦」「余弦」には，それぞれ「正弦定理」「余弦定理」がありますが，「正接」には，「正接定理」と呼ばれる定理は，教科書には載っていません。
「正接定理」ってないのでしょうか？

正弦定理

△ABCの外接円の半径をＲとすると

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

余弦定理

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=c^2+a^2-2bc\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2bc\cos C$$

そこで，ａ君は，次のような定理を作りたいと思いました。

正接定理

皆さんでしたら，どんな定理になると思いますか。考えてみましょう。
なお，tanA, tanB, tanC と <u>***a, b, c, r***</u>(△ABCの内接円の半径), <u>**R**</u>(△ABCの外接円の半径)，

<u>s</u>$\left(=\dfrac{a+b+c}{2}\right)$, <u>S</u>(△ABCの面積)のどれと関係づけて表してもかまいません。

さぁ，一つだけでなく，たくさん作ってみましょう。

1

≪提出用≫

「正接定理」を作ってみよう

岩国高校理数科１年次　理数数学Ⅰ(数学Ⅰ)

探究活動の記録

書き切れない場合は，裏面に書いてください。

私の正接定理(ここに作った定理を書いてください)

正接定理１

正接定理２

正接定理３

【感想】

１年１組(　　)番氏名(　　　　　　　　　　)

※これは、プリントを提出させた後、最後に配布しました。

「正接定理」を作ってみよう

岩国高校理数科１年次　理数数学Ｉ(数学Ｉ)

解答例

次のすべてにおいて，「A, B, C はすべて直角ではない」すなわち，
「$a^2 \neq b^2+c^2,\ b^2 \neq c^2+a^2,\ c^2 \neq a^2+b^2$」とする。

1 $$\frac{abc}{(b^2+c^2-a^2)\tan A}=\frac{abc}{(c^2+a^2-b^2)\tan B}=\frac{abc}{(a^2+b^2-c^2)\tan C}=R$$

2 $$(b^2+c^2-a^2)\tan A=(c^2+a^2-b^2)\tan B=(a^2+b^2-c^2)\tan C=\frac{abc}{R}$$

3 $$a^2=b^2+c^2-2r\frac{a+b+c}{\tan A}$$
$$b^2=c^2+a^2-2r\frac{a+b+c}{\tan B}$$
$$c^2=a^2+b^2-2r\frac{a+b+c}{\tan C}$$

4 $$\tan A=\frac{4S}{b^2+c^2-a^2}$$
$$\tan B=\frac{4S}{c^2+a^2-b^2}$$
$$\tan C=\frac{4S}{a^2+b^2-c^2}$$

5 $$\tan A=\frac{4rs}{b^2+c^2-a^2}$$
$$\tan B=\frac{4rs}{c^2+a^2-b^2}$$
$$\tan C=\frac{4rs}{a^2+b^2-c^2}$$

6 $$\tan A=\frac{2r(a+b+c)}{b^2+c^2-a^2}$$
$$\tan B=\frac{2r(a+b+c)}{c^2+a^2-b^2}$$
$$\tan C=\frac{2r(a+b+c)}{a^2+b^2-c^2}$$

7 $$\tan A=\frac{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{b^2+c^2-a^2}$$
$$\tan B=\frac{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c^2+a^2-b^2}$$
$$\tan C=\frac{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a^2+b^2-c^2}$$