１　実践にあたって

対象生徒は本校の理数科２年次生４０名である。実施時期は理数数学Ⅱの内容としての行列の指導が済み，第５回考査(学年末考査)を１週間後に控えた平成２３年２月中旬である。行列の発展的内容を扱い，そのまとめとしての意味合いも含めた実践である。

本校の理数科は，２年次に理数Ｉコースと理数Ⅱコースに分かれ，Ｉコースは数学ⅢＣまでを履修し，Ⅱコースは数学ⅡＢまでの履修になっている。なお，数学Ⅱはコース別に指導するが，数学Bは数学Cの１章分までは一緒に指導する。(年によっては，２次曲線の場合もある)　ちなみに本年度Ｉコースは３３名，Ⅱコースは７名である。したがって，本来行列を学ぶ必要のない生徒も７名いる中での実践である。

実践方法は，プリント(**２　配布プリント**で説明)を配布した後，それを読み３項間の漸化式を行列のｎ乗を利用して求める問題２題を解くというものである。時間配分は，①事前説明(本日の授業について)とプリント配布(5 分)　②プリント読解，問題解答(55 分)　③感想記入と解答例配布(5 分)である。なお，実践当時，本校は 65 分授業を実施していた。(現在は 50 分授業である。)

２　配布プリント

配布プリントはＡ４判用紙５枚に印刷したもので，うち３枚はこれまで学習した行列のｎ乗の求め方を整理して解説したものであり，残り２枚は提出用の問題用紙である。『２次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のn 乗 A^n の求め方いろいろ』というタイトルで，行列のｎ乗の求め方を３つほど扱っている。

$\boxed{\text{求め方１}}$は固有方程式，固有ベクトルを基にしてｎ乗を求める方法で，固有方程式が異なる２つの実数解をもつときの代表的な求め方である。教科書では固有方程式や固有ベクトルの名前は伏せて，いわば誘導的に具体例を考察するが，ここでは一般論を論じてその数学的現象を根底から理解させることを狙った。

$\boxed{\text{求め方２}}$は固有方程式が重解をもつ場合を扱った。$\boxed{\text{求め方１}}$ではできないとき，このような方法もあるというということの周知のためである。ケーリー・ハミルトンの定理や二項定理を活用し，元の行列が単位行列の重解倍αE と２乗すると零行列N になる行列の和として表されるとき，比較的簡単にｎ乗が求められることを実感させるものである。

$\boxed{\text{求め方３}}$は，ケーリー・ハミルトンの定理，固有方程式と整式の割算に関する基本的性質$A=BQ+R$を利用して，２次式の固有方程式 $x^2-(a+d)x+ad-bc$をx^nで割ったときの余りからA^n を求めるというものである。

具体的には，次ページのようなものである。

１．はじめに

２次の正方行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$の$n$ 乗A^n の求め方いろいろ

求め方１　教科書でもやったように①～⑤の手順で，２次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$の$n$ 乗A^n が求められます。

①$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$の**固有方程式**$\Delta(A-kE)=0$を解き，**固有値**$k_1, k_2\ (k_1 \fallingdotseq k_2)$を求める。

なお，固有方程式は，k の２次方程式 $\boldsymbol{k^2-(a+d)k+ad-bc=0}$ ……($*$)

②$X=\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$とし，$AX=k_iX\ (i=1,2)$を満たす$x_i\ (i=1,2)$を求める。$X_i=\begin{pmatrix} x_i \\ 1 \end{pmatrix}\ (i=1,2)$を**固有ベクトル**という。

③$P=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$とおき，$P^{-1}AP$を計算すると，**対角化**され，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$となる。

$\Delta(P)=k_1-k_2 \fallingdotseq 0\ (\because k_1 \fallingdotseq k_2)$であるから，$P$は逆行列をもち，$P^{-1}=\dfrac{1}{x_1-x_2}\begin{pmatrix} 1 & -x_2 \\ -1 & x_1 \end{pmatrix}$

ここで，**Pは固有ベクトルを並べて作った行列**であること，対角化されたとき，**固有値が対角成分**であることに注意しておく。

④　$(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} k_1^n & 0 \\ 0 & k_2^n \end{pmatrix}$，$(P^{-1}AP)^n=P^{-1}A^nP$であるから，$P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix} k_1^n & 0 \\ 0 & k_2^n \end{pmatrix}$

よって，$\boldsymbol{A^n=P\begin{pmatrix} k_1^n & 0 \\ 0 & k_2^n \end{pmatrix}P^{-1}}$

⑤　④より，$A^n=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1^n & 0 \\ 0 & k_2^n \end{pmatrix}\dfrac{1}{x_1-x_2}\begin{pmatrix} 1 & -x_2 \\ -1 & x_1 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{x_1-x_2}\begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} & \boxed{\text{イ}} \\ \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{エ}} \end{pmatrix}$

ア，**イ**，**ウ**，**エ**を求めて，まとめておきましょう。

> $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$の固有値を$k_1, k_2\ (k_1 \fallingdotseq k_2)$，固有ベクトルをそれぞれ$\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$
>
> $\left(\text{つまり，}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ 1 \end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix} x_2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$とすると，
>
> $$A^n=\frac{1}{x_1-x_2}\begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} & \boxed{\text{イ}} \\ \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{エ}} \end{pmatrix}$$

これとは違った方針でも２次の正方行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$の$n$ 乗A^n が求められます。

求め方２

求め方１の欠点は，固有方程式が重解をもつときにはその方法が使えないことです。
固有方程式($*$)が重解α をもつときは，次のようにします。

ケーリー・ハミルトンの定理から，$\boldsymbol{A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O}$ …… (※) です。
固有方程式（$*$）とケーリー・ハミルトンの定理（※）を見比べてください。似ているでしょう。
これが，威力を発揮するのです。

固有方程式が($*$)が重解α をもつとき($*$)は$\boldsymbol{(k-\alpha)^2=0}$ となります。一方，ケーリー・ハミルトンの定理は，$\boldsymbol{(A-\alpha E)^2=O}$ となります。そこで，$\boldsymbol{N=A-\alpha E}$ とおくと，$\boldsymbol{A=\alpha E+N,\ N^2=O}$ となります。ここで，**二項定理**を使うと，$A^n=(\alpha E+N)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r(\alpha E)^{n-r}N^r$ となります。$\boldsymbol{N^2=O}$ ですから，

$\underline{N^r=O\,(2\leqq r\leqq n)}$ です。すると, $A^n=(\alpha E+N)^n={}_n\mathrm{C}_0(\alpha E)^n+{}_n\mathrm{C}_1(\alpha E)^{n-1}N=\alpha^n E+n\alpha^{n-1}N$ となります。**(第３項以降消滅)**

$N=A-\alpha E=\begin{pmatrix} a-\alpha & b \\ c & d-\alpha \end{pmatrix}$ ですから, $A^n=\alpha^n E+n\alpha^{n-1}N=\begin{pmatrix} \{\alpha+(a-\alpha)n\}\alpha^{n-1} & bn\alpha^{n-1} \\ cn\alpha^{n-1} & \{\alpha+(d-\alpha)n\}\alpha^{n-1} \end{pmatrix}$ です。

求め方３

求め方１では固有方程式(＊)が異なる２つの実数解をもつときを考えて, ①～⑤の手順で２次の正方行列$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$の$n$ 乗A^n を求めたのですが, 次のような求め方もあります。ここで, 固有方程式(＊)の解を$\alpha,\beta(\alpha\fallingdotseq\beta)$ とおくと, $\boldsymbol{k^2-(a+d)k+ad-bc=(k-\alpha)(k-\beta)=0}$ となります。

そこで, k^n を$(k-\alpha)(k-\beta)$ で割ったときの商を$q(k)$, 余りを$sk+t$ (s, tは定数) とすると, $k^n=(k-\alpha)(k-\beta)q(k)+sk+t$ となります。　次に, 定数s, t を求めます。

$\alpha^n=(\alpha-\alpha)(\alpha-\beta)q(\alpha)+s\alpha+t$ より, $\alpha^n=s\alpha+t$ …… ①

$\beta^n=(\beta-\alpha)(\beta-\beta)q(\beta)+s\beta+t$ より, $\beta^n=s\beta+t$ …… ②

①－②より, $\alpha^n-\beta^n=(\alpha-\beta)s$　$\alpha\fallingdotseq\beta$ より, $s=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ です。

また, ②×α－①×β より, $\alpha\beta^n-\alpha^n\beta=(\alpha-\beta)t$　$\alpha\fallingdotseq\beta$ より, $t=\dfrac{\alpha\beta^n-\alpha^n\beta}{\alpha-\beta}$ です。

よって, $k^n=(k-\alpha)(k-\beta)q(k)+\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}k+\dfrac{\alpha\beta^n-\alpha^n\beta}{\alpha-\beta}$ です。

つまり, $k^n=(k^2-(a+d)k+ad-bc)q(k)+\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}k+\dfrac{\alpha\beta^n-\alpha^n\beta}{\alpha-\beta}$ ということです。

これより, $\underline{A^n=(\boldsymbol{A^2-(a+d)A+(ad-bc)E})q(A)+\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}A+\dfrac{\alpha\beta^n-\alpha^n\beta}{\alpha-\beta}E}$ となりますが,

(※)より $\boldsymbol{A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O}$ ですから, $\underline{\boldsymbol{A^n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}A+\dfrac{\alpha\beta^n-\alpha^n\beta}{\alpha-\beta}E}}$ です。

つまり, $A^n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}A+\dfrac{\alpha\beta^n-\alpha^n\beta}{\alpha-\beta}E=\begin{pmatrix} \left(\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)a+\dfrac{\alpha\beta^n-\alpha^n\beta}{\alpha-\beta} & \left(\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)b \\ \left(\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)c & \left(\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)d+\dfrac{\alpha\beta^n-\alpha^n\beta}{\alpha-\beta} \end{pmatrix}$ です。

したがって, $\boldsymbol{A^n=\dfrac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix} (a-\beta)\alpha^n-(a-\alpha)\beta^n & (\alpha^n-\beta^n)b \\ (\alpha^n-\beta^n)c & (d-\beta)\alpha^n-(d-\alpha)\beta^n \end{pmatrix}}$ となります。

２．行列のｎ乗と３項間の漸化式

行列のn 乗はとても有用で, ３項間の漸化式の一般項もこれを利用すれば求められます。

一般論になりますが, ３項間の漸化式$a_1=a, a_2=b, a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n\ (p\fallingdotseq0, q\fallingdotseq0)$…… ① で定義される数列$\{a_n\}$ の一般項を行列のn 乗を使って求めてみます。

①は, 行列では$\underline{\boldsymbol{\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}}}$…… ② と表せます。(確認しておきましょう)

ここで, $A_n=\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}, R=\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと, ②は, $\boldsymbol{A_{n+1}=RA_n}$…… ③ と表せます。

また, $A=\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ とおくと, $\underline{\boldsymbol{A_1=A,\ A_{n+1}=RA_n}}$…… ④

④を見て, 何か気付きませんか?　大文字を小文字に変えてみると,　$a_1=a,\ a_{n+1}=ra_n$…… ⑤

⑤は, 初項a , 公比r の等比数列ですから, 一般項a_n は, $a_n=ar^{n-1}$ です。すると, 漸化式④から, その一般項A_n は……$A_n=AR^{n-1}$?　惜しい！行列は, 実数のように交換法則が成り立たないので, 掛ける順番に注意しなければなりません。実は, $\boldsymbol{A_n=R^{n-1}A}$ …… ⑥ です。

すると, R^{n-1} が求められたとき, $R^{n-1}=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}$ とすると, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ …… ⑦ となるので,

$\boldsymbol{a_n=r_{21}b+r_{22}a}$ として一般項a_n が求められます。 なお, $R^{n-1}=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}$ の各成分はn の式です。

では, R^{n-1} を**求め方１**で求めてみます。

$R=\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ですから, その固有方程式は, $\Delta(R-kE)=0$ です。

$R-kE=\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p-k & q \\ 1 & -k \end{pmatrix}$ より, $\Delta(R-kE)=(p-k)(-k)-q\cdot 1=k^2-pk-q$

よって, 固有方程式は$k^2-pk-q=0$ …… ⑧です。

ここで, ⑧が異なる２つの実数解k_1, k_2 をもつときを考えます。($D=p^2-4q>0$ のときです。)

k_1, k_2 が固有値です。では, k_1 に対する固有ベクトル$X_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めてみます。

$RX_1=k_1X_1$ ですから, (この等式が, R の固有値がk_1, 固有ベクトルがX_1 ということです。)

$\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ つまり $\begin{pmatrix} px_1+q \\ x_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_1x_1 \\ k_1 \end{pmatrix}$ すなわち $\begin{cases} px_1+q=k_1x_1 & \text{……⑨} \\ x_1=k_1 & \text{……⑩} \end{cases}$

⑧より$k_1{}^2-pk_1-q=0$ですから, ⑩であれば, $k_1x_1-px_1-q=0$ つまり $px_1+q=k_1x_1$となって, ⑨を満たします。よって, $x_1=k_1$ です。同様にすれば, $x_2=k_2$ です。

したがって, 固有値k_1, k_2 に対する固有ベクトルはそれぞれ$\boldsymbol{X_1=\begin{pmatrix} k_1 \\ 1 \end{pmatrix}}$, $\boldsymbol{X_2=\begin{pmatrix} k_2 \\ 1 \end{pmatrix}}$ となります。

すると, $P=\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ということになります。$\Delta(P)=k_1-k_2\neq 0$ $(k_1\neq k_2)$ ですから, P は逆行列をもち,

$P^{-1}=\dfrac{1}{k_1-k_2}\begin{pmatrix} 1 & -k_2 \\ -1 & k_1 \end{pmatrix}$ です。ここで, $\boldsymbol{P^{-1}AP}$を計算すると,

$$P^{-1}RP=\frac{1}{k_1-k_2}\begin{pmatrix} 1 & -k_2 \\ -1 & k_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{k_1-k_2}\begin{pmatrix} p-k_2 & q \\ -p+k_1 & -q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$ となります。

なお, k_1, k_2 は⑧の解ですから, 解と係数の関係によって, $\boldsymbol{k_1+k_2=p, k_1k_2=-q}$ です。
これを上の式に代入すると,

$$\boldsymbol{P^{-1}RP}=\frac{1}{k_1-k_2}\begin{pmatrix} k_1 & -k_1k_2 \\ -k_2 & k_1k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{k_1-k_2}\begin{pmatrix} k_1(k_1-k_2) & 0 \\ 0 & k_2(k_1-k_2) \end{pmatrix}=\boldsymbol{\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}}$$ です。

確かに, 対角化ができて, しかも対角成分は固有値です！これより, $(P^{-1}RP)^{n-1}=\begin{pmatrix} k_1^{n-1} & 0 \\ 0 & k_2^{n-1} \end{pmatrix}$ です。

また, $(P^{-1}RP)^{n-1}=P^{-1}R^{n-1}P$ですから, $P^{-1}R^{n-1}P=\begin{pmatrix} k_1^{n-1} & 0 \\ 0 & k_2^{n-1} \end{pmatrix}$ となります。

すると, $R^{n-1}=P\begin{pmatrix} k_1^{n-1} & 0 \\ 0 & k_2^{n-1} \end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1^{n-1} & 0 \\ 0 & k_2^{n-1} \end{pmatrix}\dfrac{1}{k_1-k_2}\begin{pmatrix} 1 & -k_2 \\ -1 & k_1 \end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{k_1-k_2}\begin{pmatrix} k_1^n & k_2^n \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -k_2 \\ -1 & k_1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{\frac{1}{k_1-k_2}\begin{pmatrix} k_1^n-k_2^n & -k_1k_2(k_1^{n-1}-k_2^{n-1}) \\ k_1^{n-1}-k_2^{n-1} & -k_1k_2(k_1^{n-2}-k_2^{n-2}) \end{pmatrix}}$$

⑦より, $\boldsymbol{a_n}=r_{21}b+r_{22}a=\dfrac{b(k_1^{n-1}-k_2^{n-1})-a\{k_1k_2(k_1^{n-2}-k_2^{n-2})\}}{k_1-k_2}\boldsymbol{=\dfrac{(b-ak_2)k_1^{n-1}-(b-ak_1)k_2^{n-1}}{k_1-k_2}}$ となります。

では, ２次の正方行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のn 乗A^n の求め方１～３を参考にして, 次の３項間の漸化式で定められる数列$\{a_n\}$ の一般項a_n を求めてみましょう。

◆**４枚目のプリント** **【提出】**

問題１　$a_1=-1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$ の一般項a_n を２次の正方行列のn 乗を利用して求めよ。
書き切れない場合は，裏面に書いてよい。

解答欄　（以下割愛）

◆**５枚目のプリント**

もう１問やってみましょう。 **【提出】**

問題２　$a_1=2,\ a_2=3,\ a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$ の一般項a_n を２次の正方行列のn 乗を利用して求めよ。
書き切れない場合は，裏面に書いてよい。

解答欄

【感想】

２年次　１組　（　　）番　氏名（　　　　　　）

実践終了後，解答例として次のプリントを配布した。

$\boxed{\textbf{問題1の解答例１}}$　$R=\begin{pmatrix}5&-6\\1&0\end{pmatrix}$ とおくと，R の固有方程式は$k^2-5k+6=0$ である。これを解いて，

$k=2,3$ である。 $k=2$ のとき，$\begin{pmatrix}5&-6\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}$ より$x=2$　$k=3$ のとき，$\begin{pmatrix}5&-6\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}$ より$x=3$

つまり，固有値$k=2,3$ に対する固有ベクトルはそれぞれ $X=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ である。

ここで$P=\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}$ とおくと，$\Delta(P)=-1\neq0$ であるから，Pは逆行列をもち，$P=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix}1&-3\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3\\1&-2\end{pmatrix}$

である。 よって，$P^{-1}RP=\begin{pmatrix}-1&3\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-6\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&6\\5&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$ である。

したがって，両辺をn 乗すると ，$(P^{-1}RP)^n=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}$ である。 つまり，$P^{-1}R^nP=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}$

ゆえに，$R^n=P\begin{pmatrix}2^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}P^{-1}$ である。

よって，$R^n=\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n+1}&3^{n+1}\\2^n&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2^{n+1}+3^{n+1}&3\cdot2^{n+1}-2\cdot3^{n+1}\\-2^n+3^n&3\cdot2^n-2\cdot3^n\end{pmatrix}$

したがって，$R^{n-1}=\begin{pmatrix}-2^n+3^n&3\cdot2^n-2\cdot3^n\\-2^{n-1}+3^{n-1}&3\cdot2^{n-1}-2\cdot3^{n-1}\end{pmatrix}$

よって，$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\\underline{\boldsymbol{a_n}}\end{pmatrix}=A_n=R^{n-1}A_1=\begin{pmatrix}-2^n+3^n&3\cdot2^n-2\cdot3^n\\-2^{n-1}+3^{n-1}&3\cdot2^{n-1}-2\cdot3^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}-2^{n+1}+2\cdot3^n-3\cdot2^n+2\cdot3^n\\-2^n+2\cdot3^{n-1}-3\cdot2^{n-1}+2\cdot3^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\cdot2^n+4\cdot3^n\\\underline{\boldsymbol{-5\cdot2^{n-1}+4\cdot3^{n-1}}}\end{pmatrix}$$

以上から，$a_n=4\cdot3^{n-1}-5\cdot2^{n-1}$ ……(答)

$\boxed{\textbf{問題１の解答例２}}$　漸化式$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$を行列で表すと，$\begin{pmatrix}a_{n+2}\\a_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-6\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}$

$R=\begin{pmatrix}5&-6\\1&0\end{pmatrix}$ とおくと，R の固有方程式は$k^2-5k+6=(k-2)(k-3)=0$ である。

そこで, k^n を$(k-2)(k-3)$ で割ったときの商を$q(k)$, 余りを$sk+t$ (s, tは定数) とすると,

$k^n=(k-2)(k-3)q(k)+sk+t$　次に, 定数s, t を求める。

$2^n=(2-2)(2-3)q(2)+2s+t$ より, $2^n=2s+t$ …… ①

$3^n=(3-2)(3-3)q(3)+3s+t$ より, $3^n=3s+t$ …… ②

②−①より, $3^n-2^n=s$　つまり, $s=3^n-2^n$

また, ①×3−②×2 より, $3\cdot2^n-2\cdot3^n=t$　つまり, $t=3\cdot2^n-2\cdot3^n$

よって, $k^n=(k-2)(k-3)q(k)+(3^n-2^n)k+3\cdot2^n-2\cdot3^n$

つまり, $k^n=(k^2-5k+6)q(k)+(3^n-2^n)k+3\cdot2^n-2\cdot3^n$

これより, $R^n=(R^2-5R+6E)q(R)+(3^n-2^n)R+(3\cdot2^n-2\cdot3^n)E$となる。

ケーリー・ハミルトンの定理より $R^2-5R+6E=O$ であるから, $R^n=(3^n-2^n)R+(3\cdot2^n-2\cdot3^n)E$

つまり, $R^n=(3^n-2^n)\begin{pmatrix}5 & -6\\ 1 & 0\end{pmatrix}+(3\cdot2^n-2\cdot3^n)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}5(3^n-2^n)+3\cdot2^n-2\cdot3^n & -6(3^n-2^n)\\ 3^n-2^n & 3\cdot2^n-2\cdot3^n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2^{n+1}+3^{n+1} & 3\cdot2^{n+1}-2\cdot3^{n+1}\\ -2^n+3^n & 3\cdot2^n-2\cdot3^n\end{pmatrix}$$

したがって,　$R^{n-1}=\begin{pmatrix}-2^n+3^n & 3\cdot2^n-2\cdot3^n\\ -2^{n-1}+3^{n-1} & 3\cdot2^{n-1}-2\cdot3^{n-1}\end{pmatrix}$

よって, $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ \underline{\boldsymbol{a_n}}\end{pmatrix}=A_n=R^{n-1}A_1=\begin{pmatrix}-2^n+3^n & 3\cdot2^n-2\cdot3^n\\ -2^{n-1}+3^{n-1} & 3\cdot2^{n-1}-2\cdot3^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}-2^{n+1}+2\cdot3^n-3\cdot2^n+2\cdot3^n\\ -2^n+2\cdot3^{n-1}-3\cdot2^{n-1}+2\cdot3^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\cdot2^n+4\cdot3^n\\ \underline{\boldsymbol{-5\cdot2^{n-1}+4\cdot3^{n-1}}}\end{pmatrix}$$

以上から, $a_n=4\cdot3^{n-1}-5\cdot2^{n-1}$ ……(答)

問題２の解答例１　漸化式$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$を行列で表すと, $\begin{pmatrix}a_{n+2}\\ a_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ a_n\end{pmatrix}$

$R=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ とおくと, R の固有方程式は$k^2-k-2=0$ である。これを解いて, $k=-1, 2$

$k=-1$ のとき, $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ 1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x\\ 1\end{pmatrix}$ より$x=-1$　　$k=2$ のとき, $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ 1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\ 1\end{pmatrix}$ より$x=2$

つまり, 固有値$k=2, 3$ に対する固有ベクトルはそれぞれ$X=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$ である。

ここで, $P=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ とおくと, $\Delta(P)=-3\neq0$ であるから, Pは逆行列をもち,

$P=\dfrac{1}{-3}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ である。

よって, $P^{-1}RP=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ である。

したがって, 両辺を n 乗すると, $(P^{-1}RP)^n=\begin{pmatrix}(-1)^n & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}$ である。

つまり, $P^{-1}R^nP=\begin{pmatrix}(-1)^n & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}$　したがって, $R^n=P\begin{pmatrix}(-1)^n & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}P^{-1}$ である。

よって，$R^n=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^n&0\\0&2^n\end{pmatrix}\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}(-1)^{n+1}&2^{n+1}\\(-1)^n&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}(-1)^{n+2}+2^{n+1}&(-1)^{n+1}\cdot2+2^{n+1}\\(-1)^{n+1}+2^n&(-1)^n\cdot2+2^n\end{pmatrix}$

したがって，$R^{n-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}(-1)^{n+1}+2^n&(-1)^n\cdot2+2^n\\(-1)^n+2^{n-1}&(-1)^{n-1}\cdot2+2^{n-1}\end{pmatrix}$

よって，$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\\underline{\boldsymbol{a_n}}\end{pmatrix}=A_n=R^{n-1}A_1=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}(-1)^{n+1}+2^n&(-1)^n\cdot2+2^n\\(-1)^n+2^{n-1}&(-1)^{n-1}\cdot2+2^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}(-1)^{n+1}\cdot3+3\cdot2^n+(-1)^n\cdot4+2^{n+1}\\(-1)^n\cdot3+3\cdot2^{n-1}+(-1)^{n-1}\cdot4+2^n\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}(-1)^n+5\cdot2^n\\(-1)^{n-1}+5\cdot2^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{(-1)^n+5\cdot2^n}{3}\\\underline{\boldsymbol{\dfrac{(-1)^{n-1}+5\cdot2^{n-1}}{3}}}\end{pmatrix}$$

以上から，$a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}+5\cdot2^{n-1}}{3}$ ……(答)

問題２の解答例２　漸化式$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$を行列で表すと，$\begin{pmatrix}a_{n+2}\\a_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}$

$R=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}$とおくと，$R$ の固有方程式は$k^2-k-2=(k+1)(k-2)=0$ である。

そこで，k^n を$(k+1)(k-2)$ で割ったときの商を$q(k)$，余りを$sk+t$ (s, tは定数) とすると，
$k^n=(k+1)(k-2)q(k)+sk+t$　次に，定数s, t を求める。
$(-1)^n=(-1+1)(-1-2)q(-1)-s+t$ より，$(-1)^n=-s+t$ …… ①
$2^n=(2+1)(2-2)q(2)+2s+t$ より，$2^n=2s+t$ …… ②

②−①より，$2^n-(-1)^n=3s$　つまり，$s=\dfrac{2^n-(-1)^n}{3}$

また，①×2＋② より，$(-1)^n2+2^n=3t$　つまり，$t=\dfrac{(-1)^n\cdot2+2^n}{3}$

よって，$k^n=(k+1)(k-2)q(k)+\dfrac{2^n-(-1)^n}{3}k+\dfrac{(-1)^n\cdot2+2^n}{3}$

つまり，$k^n=(k^2-k-2)q(k)+\dfrac{2^n-(-1)^n}{3}k+\dfrac{(-1)^n\cdot2+2^n}{3}$

これより，$R^n=(R^2-R-2E)q(R)+\dfrac{2^n-(-1)^n}{3}R+\dfrac{(-1)^n\cdot2+2^n}{3}E$となる。

ケーリー・ハミルトンの定理より $R^2-R-2E=O$ であるから，$R^n=\dfrac{2^n-(-1)^n}{3}R+\dfrac{(-1)^n\cdot2+2^n}{3}E$

つまり，$R^n=\dfrac{2^n-(-1)^n}{3}\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}+\dfrac{(-1)^n\cdot2+2^n}{3}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{2^n-(-1)^n}{3}+\dfrac{(-1)^n\cdot2+2^n}{3}&2\cdot\dfrac{2^n-(-1)^n}{3}\\\dfrac{2^n-(-1)^n}{3}&\dfrac{(-1)^n\cdot2+2^n}{3}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}(-1)^n+2^{n+1}&(-1)^{n+1}\cdot2+2^{n+1}\\(-1)^{n+1}+2^n&(-1)^n\cdot2+2^n\end{pmatrix}$$

したがって，$R^{n-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}(-1)^{n-1}+2^n&(-1)^n\cdot2+2^n\\(-1)^n+2^{n-1}&(-1)^{n-1}\cdot2+2^{n-1}\end{pmatrix}$

よって，$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\\underline{\boldsymbol{a_n}}\end{pmatrix}=A_n=R^{n-1}A_1=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}(-1)^{n-1}+2^n&(-1)^n\cdot2+2^n\\(-1)^n+2^{n-1}&(-1)^{n-1}\cdot2+2^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}(-1)^{n-1}\cdot3+3\cdot2^n+(-1)^n\cdot4+2^{n+1}\\(-1)^n\cdot3+3\cdot2^{n-1}+(-1)^{n-1}\cdot4+2^n\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}(-1)^n+5\cdot2^n\\(-1)^{n-1}+5\cdot2^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{(-1)^n+5\cdot2^n}{3}\\\underline{\boldsymbol{\dfrac{(-1)^{n-1}+5\cdot2^{n-1}}{3}}}\end{pmatrix}$$

以上から，$a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}+5\cdot2^{n-1}}{3}$ ……(答)

３　実践中のようす

予想はしていたが，一般化して文字で書かれていたため，配布プリントの理解に手こずっている生徒が多かったようである。要は，２次の正方行列のn 乗について，少なくとも３通りの方法があり，自分に適したやりかたで求められればよいこと，その求め方の確認をして，隣接３項間の漸化式の一般項を求めるのに，行列のn 乗が活用できることを分からせたかったのである。ポイントは，等比数列の一般項を求めるときのように，あたかも行列の公比であるような２次の正方行列R の$n-1$ 乗を求めることであるが，理屈は分かっても実際にn 乗を求めるのに時間がかかったようである。

４　生徒の感想

- この分野をよく理解していなかったので,よくできなかった。でも,解法の糸口はつかめた気がするし,ごちゃごちゃしていた所が自分のなかで整ってきた気がするのでよかった。
- 今まで習ってきた勉強の内容がつながっていることがわかってうれしかった。
- 対角化について理解できていなかったので，内容を理解するまで時間がかかってしまった。でも，行列を使って一般項を求めるやり方がわかったので，考え方がとても広くなってよかったと思う。
- 数学Ｂで特性方程式を用いて求めた漸化式の一般項を数学Ｃでも行列を使って解けることが発見できたので，これからも入試に向けて活かしていきたい。
- やり方や流れをつかむことができ，理解を深めることができたと思いました。
- 行列は数列に深く関係していることが実感できました。なかなか計算が難しかったけれど，A^n がいろいろな方法で求められることがわかりました。
- ３項間の漸化式が行列を用いて求めることができるなんて知りませんでした。特性方程式でなく，固有方程式を用いて解くとは･･･　正直，行列と数列の意外な関係性に驚きました。他にも既存の学習知識でも行列を使って解けるものがあるのではないかと興味が湧きました。
- 今まで行列を使って数列の一般項を求めるという解法はあまり知らなかったので,とても使えるなあと思いました。これからはもっと行列を応用させていろいろな問題を解いてみたいです。
- 行列のn 乗を求めるやり方がたくさんあって，テクニックめいて面白かった。また，それを数列と関係させて解けるというのはとても驚いた。このシリーズは毎回良い勉強になるのでまたやりたい。
- 数列と行列は名前が似ているので，何らかの関係があるとは思っていたけれど，$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ から $\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$をひらめいた人は本当にすごいと思う。そこから，等比数列のような形にもっていけることもすごいと思う。

10 の感想を抜粋したが，これからも分かるようにこの実践に対する感じ方は，生徒それぞれであった。

３項間の漸化式は，特性方程式を解いてその一般項を求めるのが普通であろうが，この考え方では固有方程式を解くことで求められる。しかもこの場合，特性方程式も固有方程式も同じである。これに気付いた生徒もいた。実際，$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ の特性方程式も$\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有方程式も$x^2-px-q=0$ である。

数列，行列，特性方程式，固有方程式，固有値，固有ベクトル，行列のｎ乗，数列の一般項が混然一体となって，そこにある関係が浮かび上がってくる。そのような経験をした生徒には恐らく感動があったのではないかと思う。

5　生徒の解答

行列のn乗と3項間の漸化式

岩国高校理数科２年次　理数数学Ⅱ（数学B）

【提出】

$\boxed{\text{問題1}}$ $a_1=-1, a_2=2, a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$ の一般項 a_n を2次の正方行列の n 乗を利用して求めよ。

書き切れない場合は，裏面に書いてよい。

解答欄

$\underset{a}{a_1=-1}$, $\underset{b}{a_2=2}$, $a_{n+2}=\underset{p}{5}a_{n+1}\underset{q}{-6}a_n$ ①　　← $a_1=a$　$a_2=b$　$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n\ (p\neq 0, q\neq 0)$

数列 a_nの一般項（行列のn乗を使って…）

①は行列では $\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ …②と表せる

ここで，$A_n=\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$　$R=\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，②は　$A_{n+1}=RA_n$ ③と表せる.

また，$A=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ とおくと　$A_1=A$，$A_{n+1}=RA_n$ ④

$a_1=a$，　$a_{n+1}=ra_n$　⑤ ← 初項 $\underset{-1}{a}$ 公比 r の等比数列だから，一般項 $a_n=ar^{n-1}$

$A_n=R^{n-1}A$ ⑥

$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ ⑦

"R_{n-1}"

$R=\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　⇒ 固有方程式 $\Delta(R-kE)=0$

$R-kE=\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5-k & -6 \\ 1 & -k \end{pmatrix}$ より

$\Delta(R-kE)=(5-k)(-k)-(-6)\cdot 1=k^2-5k+6=(k-2)(k-3)=0$　⑧

$k_1, k_2=2, 3$　⇐ 固有値

$k_1=2$ の固有ベクトル

$RX_1=k_1X_1$ より

$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ つまり $\begin{pmatrix} 5x_1-6 \\ x_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2 \end{pmatrix}$ すなわち $\begin{cases} 5x_1-6=2x_1 \\ \underline{x_1=2} \end{cases}$

$k_2=3$ の固有ベクトル

$RX_2=k_2X_2$ より

$\begin{cases} 5x_2-6=3x_2 \\ \underline{x_2=3} \end{cases}$　　$X_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$　$X_2=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

すると　$P=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　　$\Delta(P)=2-3=-1\neq 0$　　$P^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$P^{-1}RP=-1\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 2(-1) & 0 \\ 0 & 3(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} +2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$(P^{-1}RP)^{n-1}=\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix}$　　$(P^{-1}RP)^{n-1}=P^{-1}R^{n-1}P$ だから，$P^{-1}R^{n-1}P=\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix}$

$R^{n-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$=-\begin{pmatrix} 2^n & 3^n \\ 2^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 2^n-3^n & -6(2^{n-1}-3^{n-1}) \\ 2^{n-1}-3^{n-1} & -6(2^{n-2}-3^{n-2}) \end{pmatrix}$

⑦より　$a_n=\dfrac{\{2-(-1)\cdot 3\}2^{n-1}-\{2-(-1)2\}3^{n-1}}{2-3}$　4

$=-(5\cdot 2^{n-1}-4\cdot 3^{n-1})$

$=-5\cdot 2^{n-1}+4\cdot 3^{n-1}$ //

行列のn乗と3項間の漸化式

岩国高校理数科２年次　理数数学Ⅱ(数学Ｂ)

もう１問やってみましょう。　　　　**【提出】**

問題2 $a_1=2,\ a_2=3,\ a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$ の一般項a_nを2次の正方行列のn乗を利用して求めよ。

書き切れない場合は，裏面に書いてよい。

解答欄

⑦までは問題１と同様にする

R^{n-1}を求めていく．ここにおいて $R=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}$ として　$X=\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}$ として $RX=kX$ を満たす kを求める

ケーリー・ハミルトンの定理より　$A^2-A-2E=0$

ここで Aをkにおきかえて　$k^2-k-2=0$

$(k+1)(k-2)=0$　　$k=-1,2$

$\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&0\\0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}$ より

k^2-k-2

$\begin{pmatrix}1-k&2\\1&-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ で

$k=-1$のとき　$\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$　$x+1=0$　$x=-1$　$x_1=-1$ とする

$k=2$のとき　$\begin{pmatrix}-1&2\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$　$x-2=0$　$x=2$　$x_2=2$ とする

ここで　$P=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\1&1\end{pmatrix}$ とすると　$P=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}$

$\Delta(P)=-1-2=-3\neq0$ より　Pは逆行列をもち　$P^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2\\-1&-1\end{pmatrix}$

よって　$P^{-1}RP=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}$

$=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2\\-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&0\\0&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$

また　$(P^{-1}RP)^n=P^{-1}R^nP$ より

$P^{-1}R^nP=\begin{pmatrix}(-1)^n&0\\0&2^n\end{pmatrix}$

両辺の左からP，右からP^{-1}をかけて

$R^n=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^n&0\\0&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\-1&-1\end{pmatrix}$

$=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}(-1)^{n+1}&2^{n+1}\\(-1)^n&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\-1&-1\end{pmatrix}$

$=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}(-1)^{n+1}-2^{n+1}&-2\cdot(-1)^{n+1}-2^{n+1}\\(-1)^n-2^n&-2\cdot(-1)^n-2^n\end{pmatrix}$

よって　$R^{n-1}=\begin{pmatrix}(-1)^n-2^n&-2\cdot(-1)^n\\(-1)^{n-1}-2^{n-1}&-2\cdot(-1)^{n-1}\end{pmatrix}$

よって⑦より

$a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}+5\cdot2^{n-1}}{3}$

【感想】 今回は数Bで特性方程式を用いた漸化式を数Cの行列でも解けることが発見できたので，これからも入試に向けて生かしていきたい

2年次　1組（　　）番　氏名（　　　　　　　　　　）

６　まとめ

このような実践を前期，後期に最低１回は実践するようにしている。(本校は単位制高校であり，２期制を実施している。）生徒の感想の中に，「このシリーズは毎回良い勉強になるのでまたやりたい。」というのがあったが，これは２年次前期の『４乗数・５乗数の和の公式を作ってみよう(階差数列の利用)』，１年次での『ベストアングルポイントを探せ(作図問題)』,『「正接定理」を作ってみよう』，また，２年次の夏季休業中に丸一日を使って実践した課題学習『整数探究』を指している。

このような実践は，私の理解研究の中の実践分野としての位置付けの中で行っていると同時に，新教育課程で「課題学習」が数学Ｉ・Ａで導入されることに対してその先行実践としての意味合いもある。また，それは『グループ学習による数学力向上』をめざした実践でもある。まだ，模索中であるが，いずれ体系的な理論と実践としてまとめ上げていく予定である。

このように熱心に取り組んでくれる生徒のためになれば，よりよい実践をしようという意欲も湧いてくる。生徒に教えられることは多い。日々研鑽である。