山口県立徳山高等学校

内接ｎ角形の対角線が作る交点と円の分割部分の最大個数について

[redacted]

Abstract

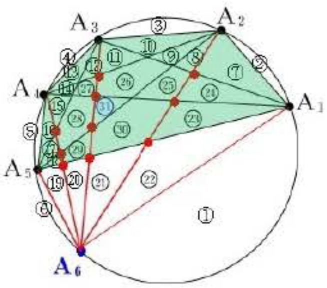
In inscribed n-polygon, the number of the division part of solid circle made by the diagonal becomes maximum when which two of the diagonal are not parallel and do not cross with one point.

We calculate the number a_n of the point of intersection made by diagonals and the number b_n of the division part of solid circle.

１．目的

内接ｎ角形の対角線で作られる円の分割部分の個数が最大になるのは，その対角線のどの２本も平行でなく，どの３本も１点で交わらないときであるから，そのとき対角線によって作られる交点の個数 a_n や円の分割部分の個数 b_n を求める。

内接6角形



２．方法

まず，いくつか調べて，どのようにすればよいか方針を立てる。$a_{n+1}=a_n+f(n)$，$b_{n+1}=b_n+g(n)$ を満たすｎの関数 $f(n)$, $g(n)$ を求め，漸化式を作り，一般項 a_n，b_n を求める。あるいは，組合せで考察する。

３．結果

図形的考察から $f(n)={}_nC_3$ であることがわかり，${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$（ｎは２以上の自然数，$r=1, 2, \cdots, n-1$）を使って $a_n={}_nC_4 (n\geqq 4)$ が導かれた。$g(n)$ は $f(n)$ と関連付け，図形的考察から $g(n)=f(n)+n$ であることがわかり，これより $b_n={}_nC_4+{}_nC_2+{}_nC_0 (n\geqq 4)$ が導けた。

４．考察

$f(n)$，$g(n)$ を求めるのに考察を要したが，図的考察の中でその正体が徐々に見えてきた。$a_n={}_nC_4 (n\geqq 4)$ ついては，円上のｎ個の点から４個を選び四角形を作るとき，その対角線の交点がすべて異なる場合は ${}_nC_4$ 個になり，これが a_n になる。視点を変えれば簡単であった。

５．結論

内接ｎ角形の対角線で作られる交点の最大個数は ${}_nC_4$ 個であり，内接ｎ角形の対角線で作られる円板の分割部分の最大個数は ${}_nC_4+{}_nC_2+{}_nC_0$ 個である。

６．参考文献

高等学校　数学Ａ，数研出版，高等学校　数学Ｂ，数研出版

７．キーワード

内接ｎ角形，対角線，交点，分割部分，漸化式