

先生方のための徹底入試対策講座

第35回 0で割ってもいいのですか？

「先生、0で割ってもいいのですか？」
 「もちろんそんなことはできないが、どういうことかな？」

1 素朴な疑問
 よくある問題での素朴な疑問？です。

(問題) $x^2 - 4x - 3 = 0$, $x > 0$ のとき, $2x^4 + x^2 + 2x + 2012$ の値を求めよ。
 (2012 小樽商科大 / 原題は客観形式)

(解答) $x^2 - 4x - 3 = 0$, $x > 0$ から

$$x = 2 + \sqrt{7} \quad \cdots \textcircled{1}$$
 $2x^4 + x^2 + 2x + 2012$ を $x^2 - 4x - 3$ で割ると 商が $2x^2 + 8x + 39$, 余りが $182x + 2129$ となるので

$$2x^4 + x^2 + 2x + 2012 = (x^2 - 4x - 3)(2x^2 + 8x + 39) + 182x + 2129 \quad \cdots \textcircled{2}$$
 が成り立ち, ①を代入して, 求める値は

$$182(2 + \sqrt{7}) + 2129 = 2493 + 182\sqrt{7} \quad \cdots \text{(答)}$$

「②の両辺に①を代入するとき, $x^2 - 4x - 3 = 0$ が成り立つので, 結局, $2x^4 + x^2 + 2x + 2012$ を 0 で割ることになってはいませんか？」

.....

数の割り算については, 0で割ってはいけない?と何度も聞いてきた受験生にとって割る式が0となるような値を代入していいのかという疑問は当然でしょうね。
 これにどう答えればいいのか? 難しいですね。どうやら, 「数の割り算」と「多項式の割り算」を混同しているようです。まず定義に戻ります。

(定義) 二つの多項式 $A(x)$, $B(x)$ に対して

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x) \quad \cdots (*)$$
 $(R(x) = 0 \text{ または } (R(x) \text{ の次数}) < (B(x) \text{ の次数}))$

を満たす多項式 $Q(x)$, $R(x)$ が定まり,
 $Q(x)$ を $A(x)$ を $R(x)B(x)$ で割ったときの商, $R(x)$ を $A(x)$ を $B(x)$ で割ったときの余りという。ただし, $B(x)$ は定数0ではないとする。

つまり, 商や余りは (*) により定義されているのです。(*) は任意の数 x について成り立つ恒等式です。したがって, (*) の両辺の x には任意の値を代入してよいのです。つまり, 「解答」では

②は恒等式であり, その両辺の x には任意の値を代入しても成り立つので, ①を代入してもいい。

ということです。これだけです。これ以外のことは、「何もしてはいないのです。」
これで、ある割合の生徒は納得してくれるでしょうね。

2 難しくてもよく分かりません！.....

でも、「先生、コウトウシキって何ですか？」と聞く生徒もある割合でいるのです。あるいはよくできると言われる生徒でも「難しくても、よく分かりません。」と、...

このような言い方は、どうでしょう。

「解答」で得られた式

$$2x^4 + x^2 + 2x + 2012 = (x^2 - 4x - 3)(2x^2 + 8x + 39) + 182x + 2129 \quad \cdots \textcircled{2}$$

の右辺を展開してみると左辺になる。このとき、 $x=0$ を代入してもやはり成り立つ。

生徒の数学の力は発展途上です。もし、準備が十分でない段階では、そのレベルにおいて（ウソではない内容で）彼らの納得する説明でいいのかもしれないね。



数学好きの生徒なら、逆に生徒自身に考えさせるという手もあります。この多項式の割り算に関しては、例えばこのように生徒に反問します。

「剰余の定理はどんな定理かな。」

「ええっと、

(剰余の定理) 多項式 $P(x)$ を 1 次式 $x - a$ で割ったときの余りは $P(a)$ である

です。」

「で、その証明は？」

「ええっと、

(証明) 多項式 $P(x)$ を 1 次式 $x - a$ で割ったときの余りを R とすると

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R \quad (R \text{ は定数})$$

と表され、 $x = a$ を代入すると

$$P(a) = R$$

よって、余りは $P(a)$ である。

となります。」

「それは論理的な間違いはないかな？」

「大丈夫です。教科書に書いていましたから。」

「では聞かすが、 $x = a$ を代入するとき、 $x - a = 0$ だから、 $P(x)$ を 0 で割ることになってはいないのかな？」

「そんなことはありません。これも教科書にそのように書いてあったので、正しいと思います。でも、なんだか変な気がしてきました。恒等式だから... ?」

ここはゆっくりと生徒自身に考えてもらいましょう。