

単振り子の周期を用いた重力加速度の測定の解説

地学の授業で、単振り子を振動させて、単振り子の周期を与える式から重力加速度を求めた。1階と4階で重力加速度の大きさが違うというのだが、理論的にはどのくらい違うのだろうか。果たして今回の実験でその違いが分かるのだろうか。重力加速度の高さによる変化を求める式を導出し、今回の実験を解説する。(興味のある人は単振り子の周期を与える式も導出することができるので物理の教科書などで調べてみると良いです)

地上の物体が地球から受ける万有引力は、物体が地球の各部分から受ける万有引力の合力である。地球を「中心からの距離が同じ点では、密度が等しい球」と考えると、その合力は地球の全質量が中心にあるとしたときの万有引力に等しいことが知られている。したがって、地球をそのような球と考え、半径を R [m]、質量を M [kg] とすれば、地上にある質量 m [kg] の物体が地球から受ける万有引力は、質量に比例し、物体間の距離の2乗に反比例するので、万有引力定数を G とおくと、地球の中心に向かう向きに

$$F = G \frac{Mm}{R^2}$$

の大きさである。また、地球は自転しているため、地上から見た物体には、地球からの万有引力の他に遠心力がはたらいっている。そのため、地上で物体にはたらく重力は、万有引力と遠心力の合力である。しかし、地球の自転によって生じる遠心力の影響は万有引力に比べて非常に小さく、ふつうは無視できる。この遠心力を無視する場合、重力としては万有引力だけを考えればよく、地表における重力加速度の大きさを g とすると、重力の大きさ mg は次式で表される。

$$mg = G \frac{Mm}{R^2}$$

したがって、 g は次のように表すことができる。

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

この式より、高さ h [m] での重力加速度 g_h は、

$$g_h = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

高さ 0 m での重力加速度 g で両辺を割ると、

$$\frac{g_h}{g} = \frac{\frac{GM}{(R+h)^2}}{\frac{GM}{R^2}}$$

よって g_h は、

$$g_h = \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 g$$

と表すことができる。本校の4階はおよそ 14 m、地球の半径を 6.4×10^6 m とすると、

$$g_h = \left(\frac{6.4 \times 10^6}{6.4 \times 10^6 + 14} \right)^2 g = 0.999972001g$$

よって、遠心力を無視した場合、1階と4階では、せいぜい小数点以下第5位が変化するくらいなのだ。したがって、考察の(1)は、1階と4階の重力加速度の値に差がないことは全く問題がないと記述して良い(ごめん笑)。ちなみに、重力は基準とする面(ジオイド面)から1m高くなるごとに約 $3.086 \times 10^{-6} \text{m/s}^2$ 小さくなる。そのため国土地理院では、高度H[m]での重力は、基準とする面での重力より $3.086 \times 10^{-6} \times H [\text{m/s}^2]$ だけ小さい値となっているため、この効果を取り除いて基準とする面での重力値に変換している。これをフリーエア補正という。

考察(2)は、単振り子の式に注目すればよい。単振り子の周期をT[s]、糸の長さをL[m]とすると、

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} L$$

となる。この式より、重力加速度の値は、周期がずれるとその2乗で誤差が発生する。また、糸の長さ、ノギスの使い方、その目盛りの読み方の精度についても触れると良い。

考察(3)は、単振り子の周期を与える式

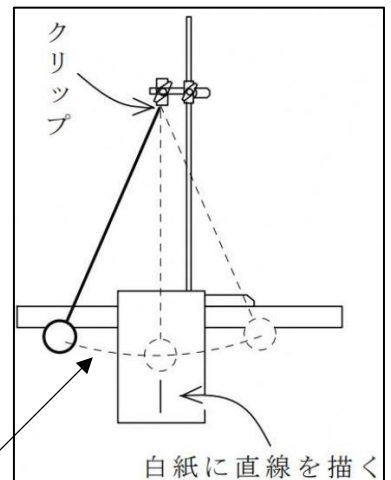
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

のgを地球の重力加速度とすると、月の重力加速度は、 $0.16g$ と表すことができるため、これをgと置き換えれば月での周期 T_m が求まる。よって、地球での周期を T_e とすると、

$$\frac{T_m}{T_e} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{L}{0.16g}}}{2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}} = 2.5$$

よって、月の周期は地球の周期の2.5倍になることが分かる。

今回の実験は、右図のような振り子を下から(もしくは上から)見たときに、おもりが単振動しているものとして、その周期と重力加速度の関係から求める実験であった。少し誤差が出た班もあったが、おおむね 9.8m/s^2 に近付いたのではないかと思います。実験で実際に求めた値を使って、よく知られている重力加速度の値に近い値が出ることは、当たり前だけどちょっとすごいと思いませんか?このように、理論だけではなくて、実際に手を動かしてやってみることはすごく大切なことだと思います。是非皆さんの今後にも役立ててくださいね。



この曲線を直線と
近似している