まとめ 1　第 2 章　2 次関数

2 次関数のグラフ

1 関数

2 つの変数 x，y があって，x の値を 1 つ決めると，それに対して，y の値がただ 1 つ決まるとき，y は x の**関数**であるといい，$\boldsymbol{y=f(x)}$ で表す．

また，単に，関数 $f(x)$ ということがある．

注　x がどんな値をとっても「$y=$」が同じ値になる場合，たとえば，$y=3$ であるような場合，これを**定数関数**という．

$y=3x-5$
……1 次関数
$y=-x^2$
……2 次関数
（p.91 参照）

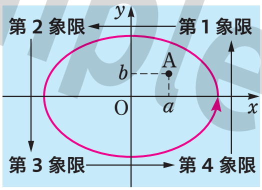
2 関数の値

関数 $y=f(x)$ について，$x=a$ のときの y の値を $\boldsymbol{f(a)}$ で表す．$f(a)$ を $x=a$ における関数 $f(x)$ の**値**という．

$f(x)=3x^2-2x+5$
のとき，
$f(a)=3a^2-2a+5$

3 座標平面と象限

x 軸，y 軸によって分けられている 4 つの部分を，右の図のように，第 1 象限，第 2 象限，第 3 象限，第 4 象限という．x 軸，y 軸上の点は，どの象限にも属さない．



第 1 象限から反時計回り

座標が $(a,\ b)$ である点 A を $\mathrm{A}(a, b)$ と書く．

$\mathrm{A}(a,\ b)$

x 座標　y 座標

4 関数のグラフ

関数 $y=f(x)$ が与えられたとき，座標平面上で $(x,\ f(x))$ を座標にもつ点全体からなる図形を $y=f(x)$ の**グラフ**という．

5 定義域・値域

関数 $y=f(x)$ に対し，x のとる値の範囲を，この関数の**定義域**，x が定義域内のすべての値をとるときの y のとる値の範囲を**値域**という．

定義域がとくに示されていない場合，定義域は，関数が意味をもつすべての x の値の範囲で考える．

注　関数 $y=f(x)$ における最も大きい値を最大値，最も小さい値を最小値という．ただし，最大値・最小値はつねに存在するとは限らない．（p.95 参照）

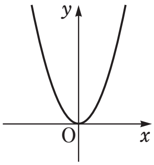
第2章

6　2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$（標準形）のグラフ

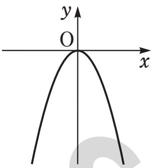
2 次関数……2 次式で表される関数

(1)　**$y=ax^2$ のグラフ**
軸は y 軸 (直線 $x=0$)
頂点は原点

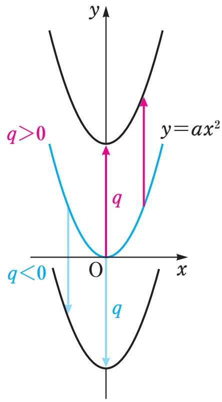
$a>0$　下に凸



$a<0$　上に凸

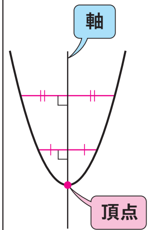


(2)　**$y=ax^2+q$ のグラフ**
軸は y 軸 (直線 $x=0$)
頂点は点 $(0,\ q)$



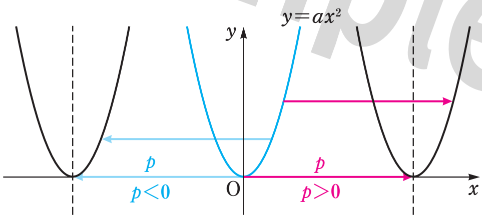
◀ 2 次関数のグラフの形の曲線を**放物線**という．

◀ 放物線の対称軸を単に「軸」という．



◀ $y=ax^2+q$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを，y 軸方向に q だけ平行移動したもの．

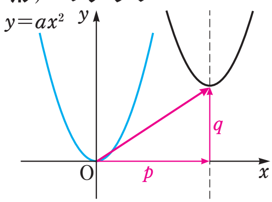
(3)　**$y=a(x-p)^2$ のグラフ**
軸は直線 $x=p$，頂点は点 $(p,\ 0)$



◀ $y=a(x-p)^2$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを，x 軸方向に p だけ平行移動したもの．

(4)　**$y=a(x-p)^2+q$（標準形）のグラフ**

$y=a(x-p)^2+q$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものである．
軸は直線 $x=p$
頂点は点 $(p,\ q)$



◀ (　)^2 の中の式 $x-p$ を $x-p=0$ とおいて，$x=p$ と求める．

注　2 次関数のグラフはいずれも軸が y 軸に平行な放物線である．放物線を平行移動しても，2 次の係数は変わらない．

7　2次関数 $y=ax^2+bx+c$（一般形）のグラフ

$y=ax^2+bx+c$ の右辺を $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形することを**平方完成**という．

$$\begin{aligned} y&=ax^2+bx+c\\ &=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c\\ &=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c\\ &=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c\\ &=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}\end{aligned}$$

$y=ax^2+bx+c$ のグラフ

軸は直線 $x=-\dfrac{b}{2a}$，頂点は点 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

◀ $y=a(x-p)^2+q$ に変形できれば，あとは $y=ax^2$ のグラフを平行移動したグラフとみなせる．

◀ x の係数の半分を2乗する．

$x^2+\dfrac{b}{a}x$
$=\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$

◀ $a\times\left(-\dfrac{b^2}{4a^2}\right)=-\dfrac{b^2}{4a}$

$-\dfrac{b^2}{4a^2}$ を $\{\ \}$ の外に出すとき，a を掛けるのを忘れずに．

Check!

01 ＊　**関数 $f(x)=2x-1$ について，$f(3)$，$f(-1)$ を求めよ．**

考え方　関数 $y=f(x)$ について，$x=a$ のときの y の値を $f(a)$ と表す．

→まとめ 1 〜 2

02 ＊　**次のような座標をもつ点は，第何象限にあるか．**

(1)　A$(-2,\ 4)$　(2)　B$(1,\ -3)$　(3)　C$(1,\ 2)$　(4)　D$(-5,\ -1)$

考え方　各象限はまとめ 3 の図のようになる．

→まとめ 3

03 ＊　**関数 $y=3x+5\ (-3\leqq x\leqq 2)$ のグラフをかき，その値域を求めよ．また，最大値，最小値があれば，それを求めよ．**

考え方　関数 $y=f(x)$ に対し，x のとる値の範囲を，この関数の定義域，x が定義域内のすべての値をとるときの y のとる値の範囲を値域という．

→まとめ 4 〜 5

解

01 $f(3)=5$，$f(-1)=-3$

02 (1)　第２象限　(2)　第４象限　(3)　第１象限　(4)　第３象限

03 値域は，$-4\leqq y\leqq 11$　最大値　11（$x=2$ のとき）　最小値　-4（$x=-3$ のとき）

例題 43　中学校で学んだ関数のグラフ　＊＊＊＊

次の関数のグラフをかけ．

(1)　$y=\frac{1}{3}x-2$　　(2)　$y=-x-2$　　(3)　$y=2$　　(4)　$y=\frac{6}{x}$

考え方

(1), (2)　1 次関数のグラフである．切片（y 軸との交点の y 座標）と傾きに注意する．

(3)　x の値にかかわらず，y の値は一定．この関数を定数関数という．

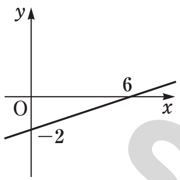
$y=\frac{1}{3}x-2$　　$y=-x-2$

傾き　切片

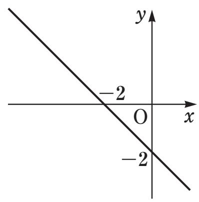
(4)　反比例のグラフで，x の値を 2 倍，3 倍，…すると，y の値は，$\frac{1}{2}$ 倍，$\frac{1}{3}$ 倍，…となる．

解答

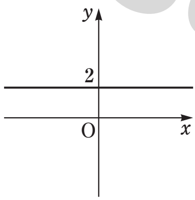
(1)



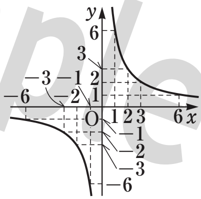
(2)



(3)



(4)



◀ (1)は，傾き $\frac{1}{3}$
切片 -2
で，右上がりの直線

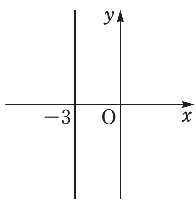
(2)は，傾き -1
切片 -2
で，右下がりの直線

◀ (3)は，すべての x の値に対して y は一定の値 2 をとる．

(4)の形のグラフを直角双曲線という．

Focus　**1 次関数は，傾きと y 切片を利用してグラフをかく**

注　右の図は，直線 $x=-3$ を表している．この直線は，$x=-3$ のとき，y はすべての値に対応していて，1 つに定まらない．
一般に，$x=k$ は，x の値を 1 つ（k のみ）決めても y の値は 1 つに決まらない．
したがって，$x=k$ は x の関数ではない．



練習 43 ＊

次の関数のグラフをかけ．

(1)　$y=\frac{1}{2}x+2$　　(2)　$y=-2x+1$　　(3)　$y=-4$

(4)　$y=\frac{2}{x}$　　(5)　$y=-\frac{4}{x}$

Check 例題 44　関数の値

＊＊＊＊

関数 $f(x)=2x^2-3x-1$ について，次の値を求めよ．

(1)　$f(1)$　　(2)　$f(-2)$

(3)　$f(a^2)$　　(4)　$f(a-1)$

考え方

関数 $f(x)$ の x を a におき換えると $f(a)$ になる．

解答

(1)　$f(x)$の式に，$x=1$ を代入して，

$$\begin{aligned} f(1)&=2\times1^2-3\times1-1\\ &=2-3-1\\ &=\mathbf{-2} \end{aligned}$$

(2)　$f(x)$ の式に，$x=-2$ を代入して，

$$\begin{aligned} f(-2)&=2\times(-2)^2-3\times(-2)-1\\ &=8+6-1\\ &=\mathbf{13} \end{aligned}$$

◀ $x=-2$ のように負の値を代入したときは，(-2) のように括弧を必ずつける．

(3)　$f(x)$ の式に，$x=a^2$ を代入して，

$$\begin{aligned} f(a^2)&=2(a^2)^2-3a^2-1\\ &=\mathbf{2a^4-3a^2-1} \end{aligned}$$

(4)　$f(x)$ の式に，$x=a-1$ を代入して，

$$\begin{aligned} f(a-1)&=2(a-1)^2-3(a-1)-1\\ &=2(a^2-2a+1)-3a+3-1\\ &=2a^2-4a+2-3a+2\\ &=\mathbf{2a^2-7a+4} \end{aligned}$$

Focus

$$f(x)=2x^2-3x-1$$

$$f(★)=2(★)^2-3(★)-1$$

同じものが入る

注　f は function (関数) の頭文字で，f と区別する関数は，g，h といった文字を使うことが多い．

練習 44 ＊

関数 $f(x)=x^2-4x+3$ について，次の値を求めよ．

(1)　$f(0)$　　(2)　$f(-3)$

(3)　$f(a+2)$　　(4)　$f(-a+2)$

➡ p.112 1 2

例題 45　値域と最大・最小　＊＊＊＊

次の関数のグラフをかき，その値域を求めよ．また，最大値，最小値があれば，それを求めよ．

(1)　$y=-2x+3\ (-2 \leqq x < 2)$　　(2)　$y=x^2\ (-1 < x < 2)$

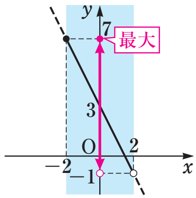
第2章

考え方

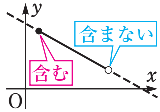
定義域の範囲内でグラフをかいて考える．このとき，定義域の両端が必ずしも**値域の両端になるとは限らない**点に注意する．
また，不等号が等号を含むかどうか（≦か＜か）も注意する．

解答

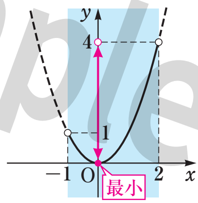
(1)　$y=-2x+3$ において，
　$x=-2$ のとき，
　　$y=-2\times(-2)+3=7$
　$x=2$ のとき，
　　$y=-2\times2+3=-1$
　よって，グラフは右の図のようになるから，
　値域は，　$-1<y\leqq7$
　最大値 7（$x=-2$ のとき）
　最小値なし



グラフにおいて，端点を含む場合は●で表し，含まない場合は○で表す．



(2)　$y=x^2$ において，
　$x=-1$ のとき，
　　$y=(-1)^2=1$
　$x=2$ のとき，
　　$y=2^2=4$
　よって，グラフは右の図のようになるから，
　値域は，　$0\leqq y<4$
　最大値なし
　最小値 0（$x=0$ のとき）

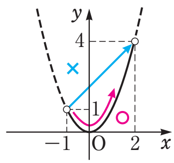


定義域以外の部分も点線で示しておくと，グラフ全体がよくわかる．

2 次関数では，両端以外（頂点）が，最大値，最小値になる場合がある．

Focus　**値域は定義域の範囲内でグラフをかいて考える**

注　例題 45 (2) で，「$-1<x<2$ より，$x=-1$ のとき，$y=1$
　　　　　　　　　　　　　$x=2$ のとき，　$y=4$
　　　　　　だから，値域は $1<y<4$」
としては**ダメ**！　（**正しくは** $0\leqq y<4$）
グラフをかいて，形をよく見ることが大切．



練習 45 ＊

次の関数のグラフをかき，その値域を求めよ．また，最大値，最小値があれば，それを求めよ．

(1)　$y=3x-4\ (-1\leqq x<3)$　　(2)　$y=\dfrac{1}{2}x^2\ (-4\leqq x\leqq 2)$

例題 46　値域から 1 次関数の係数決定　＊＊＊＊

関数 $y=ax+b\ (-2\leqq x\leqq 3)$ の最大値が 6，最小値が 1 のとき，定数 a, b の値を求めよ．

考え方

グラフをかいて考える． ただし，a の値については条件がないので，

(i)　$a=0$,　(ii)　$a>0$,　(iii)　$a<0$

で場合分けして考える．

解答

(i)　$a=0$ のとき，$y=b$ で一定の値をとるから，最大値と最小値は一致するので，不適．

(ii)　$a>0$ のとき，グラフは右の図のようになり，

$x=-2$ のとき，最小値 1

$x=3$ のとき，最大値 6

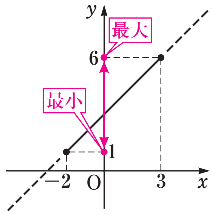
をとるから，

$$\begin{cases}-2a+b=1\\ 3a+b=6\end{cases}$$

よって，

$a=1$,　$b=3$

これは，$a>0$ を満たす．



◀ $a\neq 0$ のとき，グラフは直線 $y=ax+b$ になり，$a>0$ のとき右上がり，$a<0$ のとき右下がりの直線となる．

◀ 点 $(-2,\ 1)$ と点 $(3,\ 6)$ を通る．

(iii)　$a<0$ のとき，グラフは右の図のようになり，

$x=-2$ のとき，最大値 6

$x=3$ のとき，最小値 1

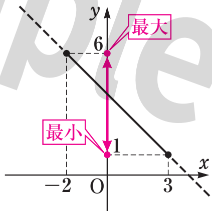
をとるから，

$$\begin{cases}-2a+b=6\\ 3a+b=1\end{cases}$$

よって，

$a=-1$,　$b=4$

これは，$a<0$ を満たす．



◀ 点 $(-2,\ 6)$ と点 $(3,\ 1)$ を通る．

以上から，求める a, b の値は，

$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=(\mathbf{1},\ \mathbf{3}),\ (\mathbf{-1},\ \mathbf{4})$

◀ $\begin{cases}a=1\\ b=3\end{cases}$ のように書いてもよい．

Focus

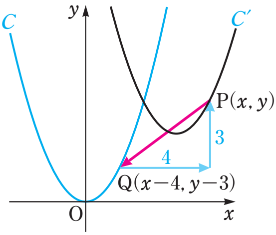
最高次の項の係数が文字のときは，その文字と 0 との大小関係により場合分けして考える

練習 46 ＊＊

関数 $y=ax+b\ (-2\leqq x\leqq 1)$ の最大値が 4，最小値が 1 のとき，定数 a, b の値を求めよ．

➡ p.112 2

解説 「グラフの平行移動」



2 次関数 $y=f(x)$ のグラフについて，これまでは頂点の移動で考えてきたが，別の観点から考えてみよう．

2 次関数 $y=2x^2$ のグラフを C,

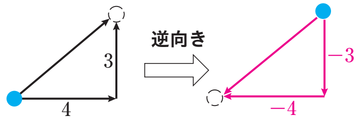
$y=2(x-4)^2+3$ のグラフを C'

とすると，C' は C を，

x 軸方向に 4，y 軸方向に 3 ……①

だけ平行移動したものである．

ここで，C' 上の点 P$(x,\ y)$ を，①とは逆向きの平行移動，つまり，



x 軸方向に -4，y 軸方向に -3

の平行移動で引き戻した点 Q を考えると，

Q$(x-4,\ y-3)$

となる．

上の図より，点 Q は C 上の点であるから，$y=2x^2$ に代入すると，

$y-3=2(x-4)^2$ より，　$y=2(x-4)^2+3$

となり，C' の方程式になっている．

つまり，　**$y=2x^2$ のグラフを①のように平行移動したグラフの関数は，**
$y=2x^2$ の　x を $x-4$，　y を $y-3$
におき換えると求められる．

一般に，

関数 $y=f(x)$ のグラフを，

$\begin{pmatrix} x \text{ 軸方向に } p \\ y \text{ 軸方向に } q \end{pmatrix}$ **だけ平行移動**したグラフの関数は，

$y=f(x)$ の $\begin{pmatrix} x \text{ を } x-p \\ y \text{ を } y-q \end{pmatrix}$ におき換えた，

$\boldsymbol{y-q=f(x-p)}$

つまり，　$y=f(x-p)+q$

で表される．

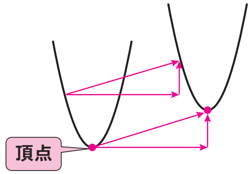
Check

例題 50　平行移動(1)　＊＊＊＊

放物線 $y=-x^2+2x+4$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に 3 だけ平行移動した放物線の方程式を求めよ．

考え方

放物線が平行移動するとき，その放物線の頂点も同様に平行移動することに着目し，まず頂点の移動を考える．



第2章

解答-1

$y=-x^2+2x+4=-(x-1)^2+5$

となり，この放物線の頂点は点 $(1,\ 5)$ である．

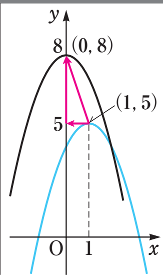
頂点を x 軸方向に -1，y 軸方向に 3 だけ平行移動すると，

$1+(-1)=0,\qquad 5+3=8$

より，求める放物線の頂点は点 $(0,\ 8)$ になる．

x^2 の係数は -1 より，求める放物線の方程式は，

$\boldsymbol{y=-x^2+8}$



解答-2

$\begin{pmatrix} x \text{ 軸方向に } -1 \\ y \text{ 軸方向に } 3 \end{pmatrix}$ だけ平行移動するから，

$\begin{pmatrix} x \text{ を } x-(-1) \\ y \text{ を } y-3 \end{pmatrix}$ におき換えて，

$y-3=-(x+1)^2+2(x+1)+4$

よって，　$\boldsymbol{y=-x^2+8}$

◀前ページの解説参照．

◀$x-(-1)$
$=x+1$

Focus

平行移動の解法

①　放物線を平行移動 $\Longrightarrow$ 頂点の移動で考えよ

②　$\begin{pmatrix} x \text{ 軸方向に } p \\ y \text{ 軸方向に } q \end{pmatrix}$ だけ平行移動 $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} x \text{ を } x-p \\ y \text{ を } y-q \end{pmatrix}$ におき換える

放物線は平行移動しても２次の係数は変わらない

注　放物線 $y=ax^2$ の頂点は，点 $(0,\ 0)$

これを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると，頂点は，

$(0,\ 0) \longrightarrow (p,\ q)$ となり，２次の係数は同じ a で，式は $y=a(x-p)^2+q$ となる．

よって，　$y-q=a(x-p)^2$

これは，$y=ax^2$ において，x のかわりに $x-p$，y のかわりに $y-q$ とおき換えたものとなっている．

練習 50 ＊　放物線 $y=2x^2+3x+1$ を x 軸方向に 3，y 軸方向に -1 だけ平行移動した放物線の方程式を求めよ．

➡ p.112 3

例題 51　平行移動(2)

✱✱✱✱✱

(1)　放物線 $y=-x^2+4x+1$ は放物線 $y=-x^2-6x+7$ をどのように平行移動したものか．

(2)　ある放物線 C を，x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動すると，放物線 $y=2x^2-3x+4$ になった．放物線 C の方程式を求めよ．

考え方

(1)　頂点の移動を考える．どちらをどちらに平行移動するのかを，しっかりおさえる．

(2)　放物線 $y=2x^2-3x+4$ を逆に，x 軸方向に -2，y 軸方向に -1 だけ平行移動すると，放物線 C が得られる．

解答

(1)　$y=-x^2+4x+1=-(x-2)^2+5$

より，頂点は点 $(2,\ 5)$

$y=-x^2-6x+7=-(x+3)^2+16$

より，頂点は点 $(-3,\ 16)$

頂点 $(-3,\ 16)$ が点 $(2,\ 5)$ に移動するから，

x 軸方向に，　$2-(-3)=5$

y 軸方向に，　$5-16=-11$

だけ平行移動している．

よって，**x 軸方向に 5，y 軸方向に -11**

◀頂点の座標をまず求める．

◀(移動した分)＝(後)－(前)

(2)　放物線 $y=2x^2-3x+4$ ……① を逆に，

x 軸方向に -2

y 軸方向に -1

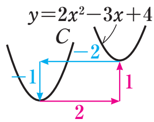
だけ平行移動したものが，放物線 C である．

よって，①の x を $x+2$，y を $y+1$ におき換えて，

$y+1=2(x+2)^2-3(x+2)+4$

$y=2(x^2+4x+4)-3x-6+3$

よって，　**$y=2x^2+5x+5$**

◀

◀頂点の移動で考えてもよい．

Focus

逆の移動を考える

$$\text{放物線 } C \;\underset{\begin{cases} x\text{ 軸方向に } -p \\ y\text{ 軸方向に } -q \end{cases}}{\overset{\begin{cases} x\text{ 軸方向に } p \\ y\text{ 軸方向に } q \end{cases}}{\rightleftarrows}}\; \text{放物線 } C'$$

練習 51 ＊＊

(1)　放物線 $y=2x^2-4x-1$ をどのように平行移動すると，放物線 $y=2x^2+8x-2$ になるか．

(2)　ある放物線 C を，x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動すると，放物線 $y=-x^2+2x+3$ になった．放物線 C の方程式を求めよ．

➡ p.112 3

Step Up　2次関数のグラフ

▶▶解答編 p.52

＊

1

← p.94

関数 $f(x)=2x^2-x+1$ について，$f(f(a))$ の値を求めよ．

＊＊

2

← p.94 p.96

(1) 関数 $f(x)=mx+n$ について，$f(2)=4$ かつ $f(4)=0$ であるとき，定数 m，n の値を求めよ．

(2) 関数 $y=ax+b$ $(0\leqq x\leqq 3)$ の値域が，$1\leqq y\leqq 4$ となるように定数 a，b の値を定めよ．（久留米大）

＊＊

3

← p.101 p.102

(1) 放物線 $y=x^2+ax+b$ を x 軸方向に1，y 軸方向に -1 だけ平行移動した放物線が2点 $(2,\ 3)$，$(3,\ 1)$ を通るとき，定数 a，b の値を求めよ．（千葉工業大・改）

(2) 放物線 $y=ax^2+bx+c$ を x 軸方向に3，y 軸方向に5だけ平行移動したものが放物線 $y=ax^2-(2a+2)x-3a+1$ で，軸は直線 $x=3$ になった．このとき，定数 a，b，c の値を求めよ．

＊＊

4

← p.105

2次関数 $y=-3x^2+12x-7$ のグラフは，$y=3x^2$ のグラフを x 軸の方向に a だけ平行移動し，x 軸に関して対称に折り返し，さらに y 軸の方向に b だけ平行移動したものである．このとき，定数 a，b の値を求めよ．

（慶應義塾大）

＊＊

5

← p.106

放物線 $y=ax^2+bx+c$ は，頂点の座標が $(2,\ 5)$ で，点 $(5,\ -22)$ を通るという．このとき，定数 a，b，c の値を求めよ．（産業能率大）

＊＊＊

6

← p.106 p.111

(1) 2つの放物線 $y=2x^2-12x+17$ と $y=ax^2+6x+b$ の頂点が一致するように定数 a，b の値を定めよ．（神戸国際大）

(2) xy 座標平面において，放物線 $y=x^2-2px+3p+5$ の頂点が直線 $y=2x+3$ 上に存在するように，正の定数 p の値を定めよ．

（産業能率大）

Column

「放物線はすべて相似」

すべての放物線は相似であるという．このことについて考えてみよう．

２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは $y=ax^2$ のグラフを平行移動したものであるから，この２つの放物線は“合同”である．

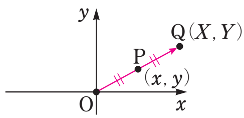
また，$y=ax^2$ のグラフと $y=-ax^2$ のグラフは，x 軸に関して対称であるから，この２つの放物線も“合同”である．

このことから，$a>0$ として，$y=x^2$ のグラフと $y=ax^2$ のグラフが相似であることを示せば，すべての放物線は互いに相似であることがいえる．

$y=x^2$ のグラフを原点 O を中心に２倍に拡大する相似の変換を考えてみる．

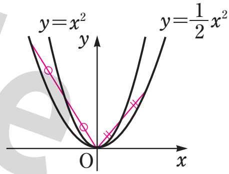
この変換によって，$y=x^2$ のグラフ上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ に移るとすると，３点 O，P，Q は一直線上にあり，$\mathrm{OQ}=2\mathrm{OP}$ であるから，

$$X=2x,\ Y=2y$$



これより，　$x=\dfrac{X}{2},\ y=\dfrac{Y}{2}$

これを，$y=x^2$ に代入すると，　$\dfrac{Y}{2}=\left(\dfrac{X}{2}\right)^2$



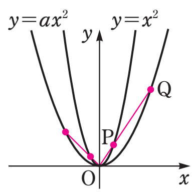
よって，$y=x^2$ は $Y=\dfrac{1}{2}X^2$，つまり，$y=\dfrac{1}{2}x^2$ に移る．

一般の場合について考えてみよう．

原点を通る，ある直線 $y=kx$ を考える．

この直線と放物線 $y=x^2$ の原点以外の共有点を P とすると，P の座標は $(k,\ k^2)$ となる．

同様に，放物線 $y=ax^2$ との原点以外の共有点を Q とすると，$y=kx$ と $y=ax^2$ の連立方程式を解くことにより，Q の座標は $\left(\dfrac{k}{a},\ \dfrac{k^2}{a}\right)$ となる．



よって，　$\dfrac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}=\left|\dfrac{k}{a}\right|\div|k|=\dfrac{1}{a}$　（一定）

つまり，$y=ax^2$ のグラフは，原点を中心にして，$y=x^2$ のグラフを $\dfrac{1}{a}$ 倍に拡大（縮小）したものである．つまり，すべての放物線は互いに相似である．

（相似…２つの図形があって，一方の図形を拡大または縮小したものと，他方の図形が合同であるとき，この２つの図形は相似であるという．）

まとめ 2　第2章　2次関数

2次関数の最大・最小

1　最大値・最小値

関数 $y=f(x)$ において，その値域に最も大きい値があるとき，その値をこの関数の**最大値**，また，最も小さい値があるとき，その値をこの関数の**最小値**という．

2　2次関数 $y=ax^2+bx+c$ の最大・最小

$$y=ax^2+bx+c \quad (\text{一般形})$$
$$=a(x-p)^2+q \quad (\text{標準形})$$

と変形すると，

軸は直線 $x=p$

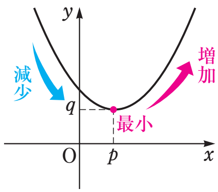
頂点は点 $(p,\ q)$

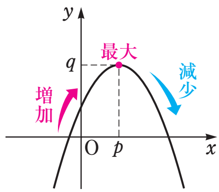
◀ $p=-\dfrac{b}{2a}$，$q=-\dfrac{D}{4a}$
ただし，$D=b^2-4ac$

(i) $a>0$ のとき
下に凸
最大値　なし
最小値　q
($x=p$ のとき)

(ii) $a<0$ のとき
上に凸
最大値　q ($x=p$ のとき)
最小値　なし

◀ 最大値，最小値をとるときの x の値は書いておこう．





注　定義域がとくに示されていない場合は定義域を実数全体とし，頂点で最小値 ($a>0$ のとき)，または，最大値 ($a<0$ のとき) をとる．

3　定義域が定められた2次関数の最大・最小

定義域内で**グラフをかいて**，次のことに着目する．

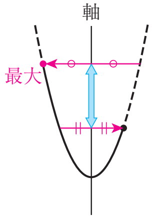
- 軸と定義域の区間の位置関係
- 頂点の y 座標
- 定義域の両端での y 座標

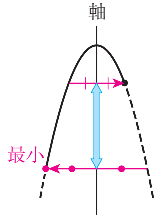
◀ グラフをかくときは，標準形に変形する．
また，x^2 の係数の符号（上に凸か下に凸か）にも着目する．

注　① 2次関数のグラフ（放物線）は，軸に関して対称になっている．そのため，

$a>0$（下に凸）の場合，
軸から遠い点ほど，値が大きくなる．

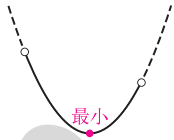
$a<0$（上に凸）の場合，
軸から遠い点ほど，値が小さくなる．



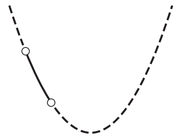


② 端点を含まない場合（$m<x<n$）の最大・最小

$y=a(x-p)^2+q$ $(a>0)$ について，
端点を含まない場合（$m<x<n$），次の図のように最大値，最小値をもつ場合ともたない場合がある．



最大値なし
最小値 $q(x=p$ のとき)



最大値なし
最小値なし

Check!

04 ＊

次の2次関数の最大値，最小値があれば求めよ．

(1)　$y=2x^2+4x+1$　　(2)　$y=-2x^2-8x+4$

考え方　$y=a(x-p)^2+q$ の形（標準形）に変形する．

→まとめ 2

05 ＊

次の関数について，それぞれ与えられた定義域における最大値，最小値があれば求めよ．

(1)　$y=(x-3)^2-1$　$(0\leqq x\leqq 2)$　　(2)　$y=-(x-1)^2+4$　$(-1\leqq x\leqq 3)$

(3)　$y=x^2-2x-3$　$(0<x<1)$　　(4)　$y=-x^2+2x+2$　$(x\geqq 2)$

考え方　グラフをかき，まとめ 3 のこと着目する．

→まとめ 3

解　**04**　(1)　最大値　なし　最小値　$-1(x=-1)$　(2)　最大値　$12(x=-2)$　最小値　なし

05　(1)　最大値　$8(x=0)$　最小値　$0(x=2)$　(2)　最大値　$4(x=1)$　最小値　$0(x=-1,\ 3)$

(3)　最大値　なし　最小値　なし　(4)　最大値　$2(x=2)$　最小値　なし

例題 58 2次関数の最大・最小 ＊＊＊＊

次の2次関数の最大値，最小値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．

(1) $y=\frac{1}{2}x^2-x+1$　　(2) $y=-x^2+3x-1$

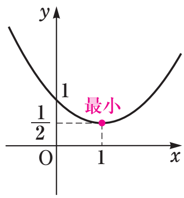
考え方

$y=a(x-p)^2+q$（標準形）にして，グラフをかいて考える．
x^2 の係数の正・負によって，頂点で最小または最大になる．

解答

(1) $y=\frac{1}{2}x^2-x+1=\frac{1}{2}(x^2-2x)+1$
$=\frac{1}{2}\{(x-1)^2-1\}+1$
$=\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}$

より，グラフは右の図のようになる．

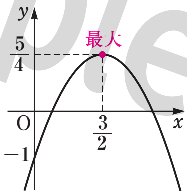


よって，　**最大値 なし**

最小値 $\frac{1}{2}$（$x=1$ のとき）

(2) $y=-x^2+3x-1$
$=-(x^2-3x)-1$
$=-\left\{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}-1$
$=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$

より，グラフは右の図のようになる．



よって，　**最大値 $\frac{5}{4}$ $\left(x=\frac{3}{2}\text{ のとき}\right)$**

最小値 なし

◀平方完成するときは，括弧をつけたり，はずしたりするときに係数の符号などに注意しよう．

◀軸の $x=1$ をもとの式 $y=\frac{1}{2}x^2-x+1$ に代入しても最小値は計算できる．

◀最大値となる特定の値がないので，最大値なしになる．（p.144 参照）

Focus　2次関数の最大・最小は，グラフをかいて考える

注　例題58では，「そのときの x の値を求めよ．」とあるので，解答でも x の値を書いているが，そうでない場合（たとえば，練習94のように，単に，「最大値，最小値を求めよ．」という場合）にも，解答には，x の値を書いておくとよい．

練習 58 ＊
次の2次関数の最大値，最小値を求めよ．
(1) $y=2x^2-8x+7$　　(2) $y=-3x^2-4x+5$　　➡p.128 7

Check
例題 **59**　定義域が定められたときの最大・最小　＊＊＊＊

次の定義域における関数 $y=-x^2+2x+2$ の最大値，最小値を求めよ．

(1)　$-1\leqq x\leqq 2$　　(2)　$2\leqq x\leqq 3$　　(3)　$-1<x<2$

考え方

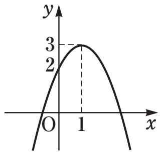
定義域内でグラフをかいて考える．このとき，軸の位置（頂点の位置）に注意する．

第2章

解答

$$y=-x^2+2x+2=-(x^2-2x)+2$$
$$=-\{(x-1)^2-1\}+2$$
$$=-(x-1)^2+3$$

◀ $y=-x^2+2x+2$ のグラフ

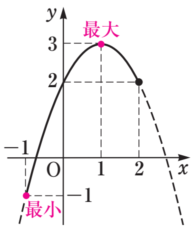


(1)　$-1\leqq x\leqq 2$ のとき，グラフは右の図のようになる．

よって，グラフより，

最大値　3（$x=1$ のとき）

最小値　-1（$x=-1$ のとき）



◀ 軸（頂点）が定義域内にあるので，頂点で最大値をとっている．

$x=-1$ のとき，$y=-1$

$x=2$ のとき，$y=2$

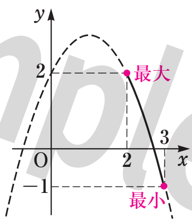
より，最大値を 2 としないように注意しよう．

(2)　$2\leqq x\leqq 3$ のとき，グラフは右の図のようになる．

よって，グラフより，

最大値　2（$x=2$ のとき）

最小値　-1（$x=3$ のとき）



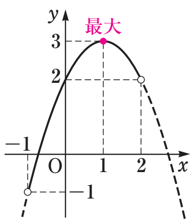
◀ 軸（頂点）が定義域内にない場合である．

(3)　$-1<x<2$ のとき，グラフは右の図のようになる．

よって，グラフより，

最大値　3（$x=1$ のとき）

最小値　なし



◀ $-1<x<2$ より，$x=-1$ は定義域に含まれないので，最小値はない．

Focus

定義域のある２次関数の最大・最小は，
軸（頂点）の位置と定義域の両端の値に注意

練習 **59**
＊

次の定義域における関数 $y=2x^2-3x-3$ の最大値，最小値を求めよ．

(1)　$0\leqq x\leqq 2$　　(2)　$-2\leqq x\leqq 0$　　(3)　$-2\leqq x\leqq 2$

➡ p.128 7

Check
例題 60　最大・最小による係数の決定　＊＊＊＊＊

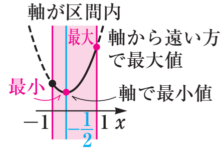
(1)　関数 $y=x^2+x+c+1\ (-1\leqq x\leqq 1)$ の最大値が5のとき，定数 c の値を求めよ．

(2)　関数 $y=ax^2-4ax+b\ (-1\leqq x\leqq 3)$ の最大値が7，最小値が -2 のとき，定数 a，b の値を求めよ．

考え方

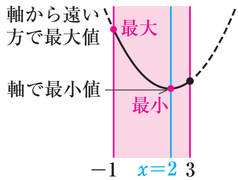
(1)　グラフは下に凸

軸は直線 $x=-\dfrac{1}{2}$ より，区間 $(-1\leqq x\leqq 1)$ 内にあるので軸のところで最小値をとり，軸から遠い方の区間の端で最大値をとる．



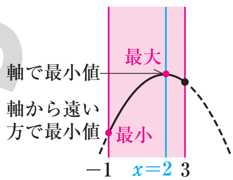
(2)　「２次関数」となっていないので，x^2 の係数が0，すなわち $a=0$ の場合も考える．
$a>0$，$a=0$，$a<0$ でグラフが異なるため場合分けして，軸と区間の位置関係を調べる．

(i)　$a>0$ のとき
グラフは下に凸
軸は直線 $x=2$ より，軸は区間内にある．
軸が区間内（下に凸）
　最小値 ⇨ 軸
　最大値 ⇨ 軸から遠い方の区間の端



(ii)　$a=0$ のとき，関数は $y=b$（一定）となる．
（条件を満たさない．）

(iii)　$a<0$ のとき
グラフは上に凸
軸 $x=2$ は区間内にある．
軸が区間内（上に凸）
　最小値 ⇨ 軸から遠い方の区間の端
　最大値 ⇨ 軸



解答

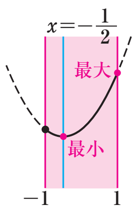
(1)　$y=x^2+x+c+1$
$=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+c+\dfrac{3}{4}$

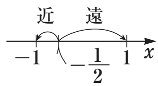
軸は直線 $x=-\dfrac{1}{2}$

グラフは下に凸だから，右の図のようになり，$x=1$ のとき最大値をとる．

$1+1+c+1=5$

よって，　$c=2$





◀ $y=x^2+x+c+1$ に $x=1$ を代入

(2)　$y=ax^2-4ax+b$

$=a(x-2)^2-4a+b$

$a\neq0$ のとき，軸は直線 $x=2$

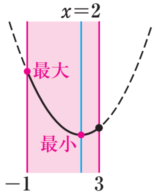
(i)　$a>0$ のとき

最小値は，

$x=2$ のとき　$-4a+b$

最大値は，

$x=-1$ のとき　$5a+b$



したがって，$\begin{cases}-4a+b=-2\\5a+b=7\end{cases}$

これより，　$a=1$，$b=2$

（$a>0$ を満たす）

(ii)　$a=0$ のとき

$y=b$ で一定の値をとるから，

最大値と最小値は一致し，不適．

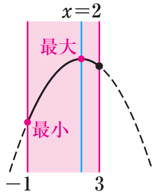
(iii)　$a<0$ のとき

最大値は，

$x=2$ のとき　$-4a+b$

最小値は，

$x=-1$ のとき　$5a+b$



したがって，$\begin{cases}-4a+b=7\\5a+b=-2\end{cases}$

これより，　$a=-1$，$b=3$

（$a<0$ を満たす）

よって，(i)，(ii)，(iii)より，

$(a,\ b)=(1,\ 2),\ (-1,\ 3)$

◀ $a\neq0$ なら２次関数で軸は直線 $x=2$

◀ $-1\leqq x\leqq3$ では $x=-1$ の方が軸から遠いので値が大きい．

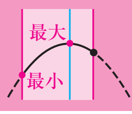
◀ $a>0$ のときを調べているので満たすことをいう．

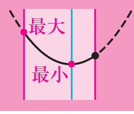
◀ グラフは上に凸

◀ $x=-1$ の方が軸から遠いので値が小さい．

Focus

最大・最小は，
上に凸か，下に凸かが重要
軸から遠い方が変化が大きい





練習 60 ＊＊

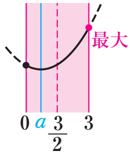
(1)　関数 $y=-x^2+x+k$ $(-1\leqq x\leqq1)$ の最小値が $-\dfrac{1}{4}$ のとき，定数 k の値と最大値を求めよ．

(2)　関数 $y=ax^2+2ax+b$ $(-2\leqq x\leqq1)$ の最大値が 11，最小値が 3 のとき，定数 a，b の値を求めよ．ただし，$a\neq0$ とする．

➡ p.128 8

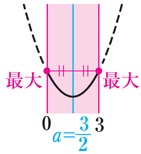
(2)　(i)　$a<\dfrac{3}{2}$ のとき

グラフは右の図のようになる．
$x=3$ のとき最大となり，
　　最大値　$-6a+13$



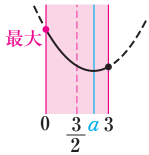
(ii)　$a=\dfrac{3}{2}$ のとき

グラフは右の図のようになる．
$x=0,\ 3$ のとき最大となり，
　　最大値　4



(iii)　$a>\dfrac{3}{2}$ のとき

グラフは右の図のようになる．
$x=0$ のとき最大となり，
　　最大値　4



よって，(i)〜(iii)より，

$$\begin{cases} a<\dfrac{3}{2} \text{ のとき，最大値 } -6a+13\ (x=3) \\ a=\dfrac{3}{2} \text{ のとき，最大値 } 4\ (x=0,\ 3) \\ a>\dfrac{3}{2} \text{ のとき，最大値 } 4\ (x=0) \end{cases}$$

◀軸が定義域の中央より左にあるか右にあるかで場合分けする．

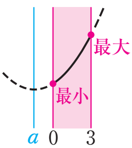
◀$x=0$ と $x=3$ では $x=3$ の方が軸から遠い．

第2章

Focus　**最大・最小は定義域と軸の位置関係，グラフの対称性に注目**

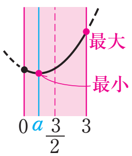
注　例題 62 において，最大値と最小値をまとめると次のようになる．

(i)　$a<0$



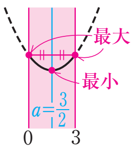
最大値　$-6a+13$
　$(x=3)$
最小値　4 $(x=0)$

(ii)　$0\leqq a<\dfrac{3}{2}$



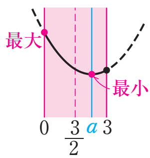
最大値　$-6a+13$
　$(x=3)$
最小値　$-a^2+4$
　$(x=a)$

(iii)　$a=\dfrac{3}{2}$



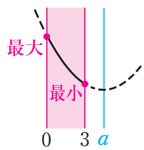
最大値　4
　$(x=0,\ 3)$
最小値　$\dfrac{7}{4}$
　$\left(x=\dfrac{3}{2}\right)$

(iv)　$\dfrac{3}{2}<a\leqq 3$



最大値　4
　$(x=0)$
最小値　$-a^2+4$
　$(x=a)$

(v)　$a>3$



最大値　4
　$(x=0)$
最小値　$-6a+13$
　$(x=3)$

練習 62　＊＊＊

(1)　関数 $y=-x^2+4ax+4\ (0\leqq x\leqq 4)$ について，次の問いに答えよ．
　(ア)　最大値を求めよ．　　　(イ)　最小値を求めよ．

(2)　関数 $y=x^2+2ax-3\ (0\leqq x\leqq 2)$ について，最大値および最小値を求めよ．

➡ p.128 10

Check
例題 63　区間が動くときの最大・最小　＊＊＊＊

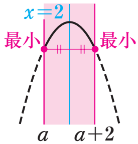
関数 $y=-x^2+4x+5$ $(a \leqq x \leqq a+2)$ について，次の問いに答えよ．

(1)　最大値を求めよ．　　　(2)　最小値を求めよ．

考え方

例題 61，62 と同様に考えるとよい．今回は上に凸のグラフである．
定義域が変化するが，幅はつねに 2 で一定である．
これまでと同様に，定義域の中央と軸に着目する．

定義域の中央は $\dfrac{a+(a+2)}{2}=a+1$ で，これと軸 $x=2$ が一致するとき，つまり，$a+1=2$ より，$a=1$ のとき，定義域の両端が軸から同じ遠さになる．

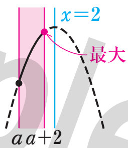


(1)　軸が定義域に含まれるかどうかで場合分けする．
(2)　定義域の中央と軸が一致するときは，右の図の場合である．
　　この場合に着目して，場合分けする．

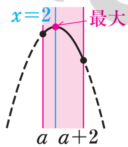
解答

$y=-x^2+4x+5=-(x-2)^2+9$
グラフは上に凸で，軸は直線 $x=2$

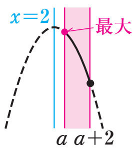
(1)　(i)　$a+2<2$ のとき
つまり，$a<0$ のとき
グラフは右の図のようになる．
$x=a+2$ のとき最大となり，
最大値 $-a^2+9$



(ii)　$a \leqq 2 \leqq a+2$ のとき
つまり，$0 \leqq a \leqq 2$ のとき
グラフは右の図のようになる．
$x=2$ のとき最大となり，
最大値 9



(iii)　$a>2$ のとき
グラフは右の図のようになる．
$x=a$ のとき最大となり，
最大値 $-a^2+4a+5$



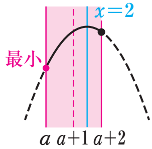
よって，(i)～(iii)より，

$$\begin{cases} a<0 \text{ のとき，} & \textbf{最大値 } -a^2+9 \ (x=a+2) \\ 0 \leqq a \leqq 2 \text{ のとき，} & \textbf{最大値 } 9 \ (x=2) \\ a>2 \text{ のとき，} & \textbf{最大値 } -a^2+4a+5 \ (x=a) \end{cases}$$

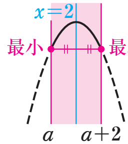
定義域 $a \leqq x \leqq a+2$ と軸の位置関係で場合分けする．
(i)軸が定義域より右側
(ii)軸が定義域内
(iii)軸が定義域より左側

$a \leqq 2 \leqq a+2$ は，
$a \leqq 2$ かつ $2 \leqq a+2$
で，$2 \leqq a+2$ より
$a \geqq 0$ だから，
$0 \leqq a \leqq 2$

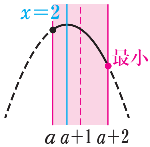
(2)　(i)　$a+1<2$ つまり，$a<1$ のとき
グラフは右の図のようになる．
$x=a$ のとき最小となり，
　　最小値　$-a^2+4a+5$



(ii)　$a+1=2$ つまり，$a=1$ のとき
グラフは右の図のようになる．
$x=1,\ 3$ のとき最小となり，
　　最小値 8



(iii)　$a+1>2$ つまり，$a>1$ のとき
グラフは右の図のようになる．
$x=a+2$ のとき最小となり，
　　最小値　$-a^2+9$



よって，(i)〜(iii)より，

$$\begin{cases} a<1 \text{ のとき，最小値 } -a^2+4a+5\ (x=a) \\ a=1 \text{ のとき，最小値 } 8\ (x=1,\ 3) \\ a>1 \text{ のとき，最小値 } -a^2+9\ (x=a+2) \end{cases}$$

◀軸が定義域の中央より左にあるか右にあるかで場合分けする．

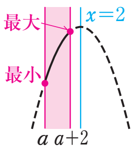
第2章

Focus

最大・最小は定義域と軸の位置関係，グラフの対称性に注目

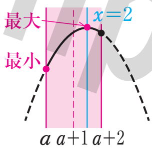
注　例題 63 において，最大値と最小値をまとめると次のようになる．

(i)　$a<0$



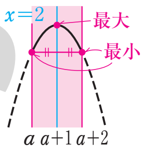
最大値　$-a^2+9\ (x=a+2)$
最小値　$-a^2+4a+5\ (x=a)$

(ii)　$0\leqq a<1$



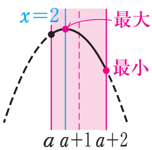
最大値　9 $(x=2)$
最小値　$-a^2+4a+5\ (x=a)$

(iii)　$a=1$



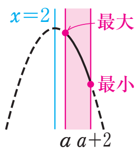
最大値　9 $(x=2)$
最小値　8 $(x=1,\ 3)$

(iv)　$1<a\leqq 2$



最大値　9 $(x=2)$
最小値　$-a^2+9\ (x=a+2)$

(v)　$a>2$



最大値　$-a^2+4a+5\ (x=a)$
最小値　$-a^2+9\ (x=a+2)$

練習 63
＊＊＊

(1)　関数 $y=x^2-2x+2\ (a\leqq x\leqq a+2)$ について，次の問いに答えよ．
　(ア)　最大値を求めよ．　　　(イ)　最小値を求めよ．
(2)　関数 $y=-x^2+4x+2\ (a\leqq x\leqq a+1)$ について，最大値および最小値を求めよ．

➡ p.128 11

例題 64 おき換えによる最大・最小 ＊＊＊＊

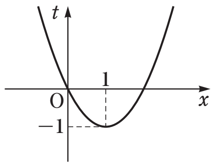
$y=(x^2-2x)^2+6(x^2-2x)+5$ について，次の問いに答えよ．
(1) $t=x^2-2x$ とおいて，t のとりうる値の範囲を求めよ．
(2) y を t の式で表すことにより，y の最小値と，そのときの x の値を求めよ．

考え方

y は x の4次関数であるが，おき換えをすることによって，2次関数に帰着できる．
つまり，y は t の2次関数として考えることができる．そのとき，おき換えた文字の変域に注意する．
つまり，$t=x^2-2x$ より，t の変域を調べる．

解答

(1) $t=x^2-2x$
$\quad =(x-1)^2-1$
より，グラフは右の図のようになる．

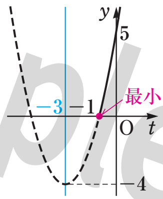


よって，t のとりうる値の範囲は，
$\quad$ **$t \geqq -1$**

◀ t は x についての2次関数となるので，横軸に x，縦軸に t

(2) 与えられた関数で $t=x^2-2x$ とすると，
$\quad y=t^2+6t+5$
$\quad =(t+3)^2-4$ ……①

(1)より，$t \geqq -1$ であるから，この範囲で，①のグラフをかくと，右の図のようになり，
$t=-1$ のとき，y は最小値0をとる．



◀ (1)で求めた t の値の範囲で考える．
◀ y は t についての2次関数となるので，横軸に t，縦軸に y

また，$t=-1$ のとき，$x^2-2x=-1$
$\quad x^2-2x+1=0$
$\quad (x-1)^2=0$ より，$x=1$

よって，**y の最小値0（$x=1$ のとき）**

◀ x の値を求めておく．

Focus おき換えた文字の変域に注意せよ

練習 64 ＊＊＊

(1) 関数 $y=x^4+2x^2+3$ について，次の問いに答えよ．
(ア) $t=x^2$ とおいて，t のとりうる値の範囲を求めよ．
(イ) y を t の式で表すことにより，y の最小値と，そのときの x の値を求めよ．

(2) 関数 $y=(x^2-4x)^2+6(x^2-4x)+5$ について，次の問いに答えよ．
(ア) $t=x^2-4x$ とおいて，t のとりうる値の範囲を求めよ．
(イ) y を t の式で表すことにより，y の最小値と，そのときの x の値を求めよ．

➡ p.128 12

Coffee Break 「数学が得意な人になる」

Focus Gold Smart で勉強しているみなさんは誰もが，「数学ができるようになりたい」，「難関大学の入試に通用する数学力を身に付けたい」と考えていると思います．では，どのようにすれば数学が得意になるのでしょうか．ここでは，学力向上のポイントと, タイプ A と B の2パターンの勉強法を考えていきましょう．いったいどちらのタイプの方が「数学が得意になる人」でしょうか．

①徹底的に繰り返す事

〜ポイント〜

1冊を通して標準レベルの問題(Focus Gold Smart では，＊＊〜＊＊＊)の問題を繰り返し解き，考えなくても解法がスラスラ出てくる位のレベルにする．

(タイプ A)

・1冊を最後までやり通すことができず，次から次へと新しい教材に手を出す
・やったらやりっぱなしで，できなかった問題についても特に復習しない
・とにかく解き方を覚えよう(丸暗記)とする

(タイプ B)

・自分の一番のお気に入りの参考書，問題集を1冊に絞り，ひたすら繰り返す
・できなかった問題についてはできるまで何回も繰り返す
・単に解き方を覚えるのではなく「考え方」を重視し，わからなかったら(納得がいかなかったら)トコトン，友達や先生に聞く

②初めて見る問題の対処法

〜ポイント〜

問題文の中には何らかの形で既習事項（過去に学んだ内容や問題）につながるキーワード(条件)が隠れている．いかにして，そのキーワードを貪欲に自分の思考のヒントにできるかが大きな分かれ道.「応用力」とは難しい問題が解ける力ではなく，初見の問題をいかにして，基本問題へ落とし込むことができるかという力.

ここで言う「基本問題」とは単に簡単な問題ということではなく，各問題の考え方の土台になる問題を指す．

(タイプ A)

・問題文を何となく(ボーッと)読んでおり，基本問題との関連性を考えない
・問題毎に思いつきの解法を編み出し，考え方に一貫性が無い

（タイプＢ）
・どんな問題でも思考の方向がハッキリしている
→例えば，「よくわからないなぁ」→「求められている答えの形式はあの問題（基本問題）に似ているなぁ」→「何とか解法を真似できないかなぁ」→「あの問題と比べて与えられている条件（設定）は何が違うのかなぁ？」→「あの問題の解法に帰着するには，条件としてこれとこれが足りないなぁ…」など，何とかして知っている問題と関連付けようとする

③復習の仕方
～ポイント～
数学ができる人はみな，教材を絞り，復習重視の学習をしている．
また，解説についても読みっぱなしではなく，理解できるまで復習している．
（タイプＡ）
・どの問題集，参考書についてもやりっぱなしで，繰り返し復習しない
→定期考査や実力考査の前だけサッとやって終わり
・同じ問題を解いても意味が無いと思っている
・数学の学習は解法を暗記することだと思っている
→その結果，多大な労力を必要とし，その割にはすぐに忘れてしまう
・テストも正解か不正解かだけに一喜一憂して，ただ，模範解答を読むだけ
→特に，模擬試験については返却されても全く復習しない
（タイプＢ）
・授業で習ったことをその日に問題集（参考書）で復習する学習法を確立している
・３冊×１回＜１冊×３回の効果を知っている
・自力でできたものは○，解説を読んで理解したものは△，解説を読んでも理解できなかったものは×など，自分の中で問題のでき具合（難易度）を整理しておく
→上記の△，×が○になるまで何度でも解き直す
・いきなり解答をすべて読まない
→まずはヒントやポイントを読み，再度，自力で解き直す．そして詰まった部分だけ「チラッ」と解説を見て，またその先から自分で解いてみる（チラ見学習法！）
→覚えようとする（暗記しようとする）のではなく，理解することに重点をおく
・復習し終わった後に，自分に欠けていたもの（知識，技術，考え方）をきちんと整理してまとめておく

いかがですか？タイプＡとタイプＢのどちらが「数学が得意な人」だと思いますか？そうです．正解は，「タイプＢ」の人です．もちろん，得意といっても最初から数学がすらすら解けるわけではありません．それでは，なぜ「タイプＡ」の人は数学が不得意になって，「タイプＢ」の人は数学が得意になるのでしょうか．

【不得意になる最大の理由】

一番の理由は「中途半端な取り組みによる**消化不良**」です．

１冊の参考書(問題集)の中にできる問題とできない問題(消化不良)がある場合，その知識は入試(模試)では使い物になりません．また，中途半端な知識のため，「この方法でできるかな？できないかな？できればラッキーだな．取りあえずやってみるか…」というように解法に絶対的な自信を持っておらず，つねに行き当たりばったりの解法となり，その結果，点数が安定しません．

【繰り返し復習する人の方が力が付く理由】

一見無限にあるように見える問題パターンも１冊を突き詰めれば，必ず何らかのヒントが思い浮かびます(無限の問題パターンを有限にする唯一の方法が１冊の参考書(問題集)を完璧にマスターすること)．繰り返し復習する人は，１冊の参考書を通して，頭の中の引き出しに各問題の解法ポイントが整理して収納されており，大切なことは漏れなく完璧にマスターしています．その結果，難しい問題でも「Focus Gold Smart のあの問題の類題だから，時間をかければ絶対に解ける！」という自信を持って問題を解くことができます．

以上を考えると，数学ができるようになる方法はただ１つ，多くの参考書や問題集に取り組むのではなく１冊の本を完全に理解することです．１冊の参考書(問題集)に絞ることにより反復もしやすく，その結果，理解できる問題がどんどん増え，時間も短時間で済みます．Focus Gold Smart のような網羅系参考書は厚くてマスターするのに時間がかかるという意見が多いですが，実は全く逆で，何冊も問題集を取り組み，中途半端な理解のままで時間が過ぎていく方が時間の無駄です．

１冊の本を最低３周繰り返して初めて自分の力になる

みなさんも１冊を信じて，自分を信じて，繰り返し繰り返し復習して下さい．
そうするとある日突然，数学ができるようになりますよ．

チャレンジ編

●チャレンジ編の構成

チャレンジ編は「Level up 問題」，「解説 Level up 問題」で構成されています。

Level up 問題

チャレンジ編では，最近の入試問題や過去の良問を中心に，「絶対に取り組んでもらいたい 30 題」で構成しています。『マスター編』の学習を終えたあと，**入試へ向けた演習や，数学的思考を養う演習**を行う際にお使いください。

解説 Level up 問題

Level up 問題はすべて，「解説 Level up 問題」として本編で解説をしています。解説の中では，解法やポイントの確認とともに，「One Point Lesson」として, 別視点のアプローチなどが確認できます。**問題が解けたかどうかにとどまらず，入試に対応するための様々な学力を養ってください。**

●チャレンジ編の活用方法

基本・標準レベルが身についていて，マスター編の各章の「Step Up」にも取り組んだあとに，チャレンジ編に取り組みましょう。

マスター編の「Step Up」にチャレンジ
1問につき「＊」×5分を目安に考える。

自力で解けた場合

チャレンジ編の「Level up 問題」に取り組み，実際の入試問題を体験してみましょう。

解けたかどうかで終わらず，自分に足りない部分などを確認する。

解けなかった場合

参照例題に戻って例題を復習し，解けなかったポイントや自分に足りなかった部分を再認識する。

チャレンジ編の学習も，これまでのマスター編の学習と同じです。まずは自分で考えてみるところから始めましょう。そして，わからない場合は関連するマスター編の例題に戻って，内容を確認しましょう。

LEVEL UP 問題

□の問題の解答は，別冊解答編 $p.472$ ~に掲載しています．

第１章　数と式

1

← $p.75$ $p.81$

a を整数とする．不等式

$$2|x-a|<x+1$$

を満たす整数 x が 3 個あるとき，a の値を求めよ．（10 大阪経済大）

2

← $p.64$

$x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$，$y=\dfrac{5x+4}{x+1}$ のとき，

(1) y の整数部分と小数部分を求めよ．

(2) y に最も近い整数値を求めよ．（麻布大）

第２章　２次関数

3

← $p.124$

x の関数 $f(x)=x^2+3x+m$ の $m\leqq x\leqq m+2$ における最小値を g とおく．次の問いに答えよ．ただし，m は実数の定数とする．

(1) 最小値 g を m を用いて表せ．

(2) m の値がすべての実数を変化するとき，g の最小値を求めよ．（岐阜大・改）

4

← $p.126$ $p.161$ $p.169$

x，y を実数とし，

$$F=x^4-4x^2y+y^2+3y$$

とする．

(1) すべての y に対して $F\geqq 0$ となるような x の値の範囲を求めよ．

(2) すべての x に対して $F\geqq 0$ となるような y の値の範囲を求めよ．（東京大・改）

5

← $p.161$

x の 2 次関数 $f(x)=x^2-2px-p^2+2p-1$ について，次の問いに答えよ．

(1) p がどのような値をとっても $f(x)<0$ となる x の値の範囲を求めよ．

(2) 2 次方程式 $f(x)=0$ の実数解 x のとりうる値の範囲を求めよ．

解説　LEVEL UP 問題

第１章　数と式

1　a を整数とする．不等式

$$2|x-a|<x+1$$

を満たす整数 x が３個あるとき，a の値を求めよ．　(10 大阪経済大)

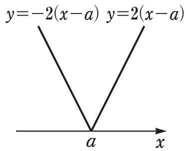
＜考え方＞

x が題意を満たすのはどのようなときなのかを，グラフをかいて考える．

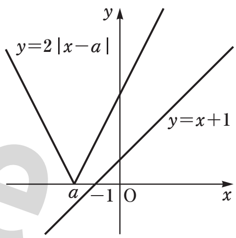
また，不等式に等号が含まれていないことに注意する．

解　$\begin{cases} 2|x-a|=2(x-a) & (x \geqq a) \\ 2|x-a|=-2(x-a) & (x<a) \end{cases}$

より，関数 $y=2|x-a|$ のグラフは右の図のようになる．



ここで，$a \leqq -1$ のときは，グラフは右の図のようになり，すべての実数 x に対して，$2|x-a| \geqq x+1$ が成り立つので，題意を満たさない．



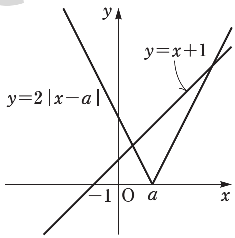
よって，$a>-1$ である．

このとき，グラフは右下の図のようになり，関数 $y=2|x-a|$ と関数 $y=x+1$ のグラフの交点の x 座標は，

$$-2(x-a)=x+1 \text{ と}$$

$$2(x-a)=x+1$$

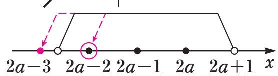
をそれぞれ解いて，$\dfrac{2a-1}{3}$ と $2a+1$ となる．



よって，$\dfrac{2a-1}{3}<x<2a+1$ のとき，不等式 $2|x-a|<x+1$ が成り立つ．

そこで，$\dfrac{2a-1}{3}<x<2a+1$ を満たす整数 x が３個となるときを考える．

このとき，整数 x は $x=2a$，$2a-1$，$2a-2$ となり，また，



$$2a-3 \leqq \frac{2a-1}{3}<2a-2 \quad \cdots\cdots①$$

が成立する．

◀等号の有無に注意

a についての連立不等式①を解いて，

$$\frac{5}{4}<a \leqq 2$$

これを満たす整数 a は，　$a=2$

また，これは $a>-1$ を満たす．

◀吟味も忘れないこと

よって，　$\boldsymbol{a=2}$

One Point Lesson

絶対値を含む不等式においては，次の公式が成り立つ．

$|A|<B \iff -B<A<B$ ……①
$|A|>B \iff A<-B,\ B<A$ ……②

（証明）

A と $-A$ のうち，大きい方を $\mathrm{Max}(A,\ -A)$ とおくと，$|A|=\mathrm{Max}(A,\ -A)$ である．

① $|A|<B$ は，すなわち $\mathrm{Max}(A,\ -A)<B$ である．
したがって，これは $A<B$ かつ $-A<B$ となるので，
$-B<A<B$ が成り立つ．

② $|A|>B$ は，すなわち $\mathrm{Max}(A,\ -A)>B$ である．
したがって，これは $A>B$ または $-A>B$ となるので，
$A<-B,\ B<A$ が成り立つ．

（証明終わり）

これを利用すると，絶対値を含む不等式を場合分けせずに考えることができる．
例えば，問題 1 では，以下のように考えることができる．

不等式 $2|x-a|<x+1$ は，

$$-(x+1)<2(x-a)<x+1$$

とできる．
ここで，$-(x+1)<2(x-a)$ より，

$$x>\frac{2a-1}{3} \quad \cdots\cdots③$$

また，$2(x-a)<x+1$ より，

$$x<2a+1 \quad \cdots\cdots④$$

よって，③，④の共通部分を求めて，

$$\frac{2a-1}{3}<x<2a+1$$

となる．（以下同様）

変数 x が右辺に含まれているので，
「$2|x-a|<x+1 \iff -(x+1)<2(x-a)<x+1$」 ……(＊)
と変形することにためらうかもしれない．しかし，(＊) は，
「定めた x の各値に対して『$2|x-a|<x+1 \iff -(x+1)<2(x-a)<x+1$』」ということであり，記号「$\iff$」の左右において x の値は変わらない．
よって，このとき，不等式 $2|x-a|<x+1$ と，不等式 $-(x+1)<2(x-a)<x+1$ における x の値は同じであり，また，$2|x-a|=|2x-2a|$，$2(x-a)=2x-2a$ であることから，$A=2x-2a$，$B=x+1$ とおくことで，①から(＊)が導かれる．

なお，この公式①，②は，A や B の正負や文字式かどうかにかかわらず成り立ち，そこがこの同値式のよいところである．

2 $x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$, $y=\dfrac{5x+4}{x+1}$ のとき，

(1) y の整数部分と小数部分を求めよ．

(2) y に最も近い整数値を求めよ． （麻布大）

<(1)の考え方>

x の分母を有理化してから，y に代入する．

(1)の解 $x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$

より，

$$y=\frac{5x+4}{x+1}=\frac{5(x+1)-1}{x+1}=5-\frac{1}{x+1}$$

$$=5-\frac{1}{(2-\sqrt{3})+1}=5-\frac{1}{3-\sqrt{3}}$$

$$=5-\frac{3+\sqrt{3}}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}=5-\frac{3+\sqrt{3}}{6}$$

$$=\frac{27-\sqrt{3}}{6}$$

$1<\sqrt{3}<2$ より，$25<27-\sqrt{3}<26$

したがって，$\dfrac{25}{6}<\dfrac{27-\sqrt{3}}{6}<\dfrac{26}{6}$

よって，$4<\dfrac{25}{6}<\dfrac{26}{6}<5$ より，

y の**整数部分**は，4

y の**小数部分**は，$\dfrac{27-\sqrt{3}}{6}-4=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$

◀分母を有理化して，簡単にしてから y に代入する．

◀$y=\dfrac{5x+4}{x+1}$ に $x=2-\sqrt{3}$ をそのまま代入してもよい．

◀$1<\sqrt{3}<2$ より，
$-2<-\sqrt{3}<-1$
各辺に 27 をたすと，
$27-2<27-\sqrt{3}<27-1$

◀(小数部分)
＝(もとの数)－(整数部分)

<(2)の考え方>

y の小数部分と 0.5 の大小を調べる．

(2)の解 y の小数部分と 0.5 の大小を調べる．

$$0.5-\frac{3-\sqrt{3}}{6}=\frac{1}{2}-\frac{3-\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{6}>0 \text{ より，}$$

$$0<\frac{3-\sqrt{3}}{6}<0.5$$

したがって，$4<y<4.5$

よって，y に最も近い整数値は，4

◀$\dfrac{25}{6}<\dfrac{27-\sqrt{3}}{6}<\dfrac{26}{6}$ より，
$4.1\dot{6}<\dfrac{27-\sqrt{3}}{6}<4.\dot{3}$

One Point Lesson

$p.64$ の例題 31 でも用いたが，実数の小数部分は，(小数部分)＝(もとの実数)－(整数部分)というように**小数部分を直接算出せずに表すことができる**．
例えば，$\pi=3.14\cdots$ であるが，その小数部分は，$\pi-3$ である．
また，小数部分 s はつねに $0\leqq s<1$ を満たすこともおさえておこう．