

10 2次関数のグラフ

要点 1 2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

- ・ $y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動した放物線
- ・ 軸は直線 $x=p$, 頂点は点 (p, q)
- ・ $a>0$ のとき下に凸, $a<0$ のとき上に凸

要点 2 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

$y=a(x-p)^2+q$ と平方完成すると, そのグラフそかくことができる。

必須

109 【 $y=ax^2$ のグラフ】 次の 2 次関数のグラフをかけ。

- (1) $y=2x^2$ □ (2)* $y=-2x^2$ □ (3)* $y=\frac{3}{2}x^2$ □ (4) $y=-\frac{3}{2}x^2$ ▶ 教 p. 50 問 5

110 【 $y=ax^2+q$ のグラフ】 次の 2 次関数のグラフをかけ。また, 頂点を求めよ。

- (1) $y=x^2+2$ □ (2) $y=-x^2+3$
 □ (3)* $y=2x^2-4$ □ (4)* $y=-\frac{1}{2}x^2+2$ ▶ 教 p. 51 問 6

111 【 $y=a(x-p)^2$ のグラフ】 次の 2 次関数のグラフをかけ。また, 軸と頂点を求めよ。

- (1) $y=(x-2)^2$ □ (2)* $y=2(x+3)^2$ □ (3) $y=-2(x-3)^2$ ▶ 教 p. 52 問 7

112 【 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ】 次の 2 次関数のグラフをかけ。また, 軸と頂点を求めよ。

- (1) $y=(x-2)^2+3$ □ (2) $y=2(x+1)^2-2$ □ (3)* $y=-3(x+2)^2+9$ ▶ 教 p. 53 問 8

113 【平方完成】 次の 2 次関数を $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形せよ。

- (1)* $y=x^2-6x$ □ (2) $y=x^2+2x+3$
 □ (3) $y=2x^2+8x-1$ □ (4)* $y=-3x^2-9x+1$ ▶ 教 p. 54 例 4

114 【 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ】 次の 2 次関数を $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形し, グラフをかけ。

- (1)* $y=x^2-4x+5$ □ (2)* $y=x^2+3x$
 □ (3)* $y=2x^2-8x+9$ □ (4) $y=-x^2-6x+3$
 □ (5)* $y=-3x^2-6x-3$ □ (6) $y=-2x^2+x-\frac{1}{2}$ ▶ 教 p. 55 例題 1

演習

115 次の 2 次関数のグラフをかけ。また, 軸と頂点を求めよ。

- (1)* $y=\frac{1}{2}x^2+x-1$ □ (2) $y=-\frac{3}{2}x^2+3x$
 □ (3)* $y=(x-1)(x+3)$ □ (4) $y=-3(x+2)(x-4)$ → 114

- 116 次の関数のグラフの頂点が一致するように定数 a, b の値を定めよ。

$$y = x^2 - 2ax + a^2 - 1, \quad y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + b$$

→ 114

- 117 次の各組の2次関数において、(A)のグラフを(B)のグラフに重ねるには、どのように平行移動すればよいか。

□ (1)* $\begin{cases} \text{(A)} & y = x^2 - 1 \\ \text{(B)} & y = x^2 + 2x + 3 \end{cases}$

□ (2) $\begin{cases} \text{(A)} & y = -3x^2 + 12x \\ \text{(B)} & y = -3x^2 - 6x - 1 \end{cases}$

▶ 図 p. 173~175 探究 3

- 118 放物線 $y = x^2 - 2x + 3$ を次のように移動した放物線の方程式を求めよ。

□ (1) x 軸方向に1だけ平行移動

□ (2)* x 軸方向に2, y 軸方向に-1だけ平行移動

▶ 図 p. 173~175 探究 3

- 119* 次の放物線を, x 軸, y 軸, 原点に関して, それぞれ対称移動した放物線の方程式を求めよ。

□ (1) $y = -x^2 + 2x$

□ (2) $y = 2x^2 - 4x + 1$

▶ 図 p. 176~177 探究 4

応用

例題 10

ある放物線を x 軸方向に-3, y 軸方向に2だけ平行移動すると放物線 $y = -3x^2 + 6x + 1$ になるという。もとの放物線の方程式を求めよ。

解 $y = -3x^2 + 6x + 1 = -3(x-1)^2 + 4$

よって, この放物線の頂点の座標は, (1, 4)

もとの放物線の頂点は, 点(1, 4)を

x 軸方向に3, y 軸方向に-2だけ移動した点

←逆の移動を考えている。

だから, その座標は, (1+3, 4-2)

すなわち, (4, 2)

よって, 求める放物線の方程式は,

$$y = -3(x-4)^2 + 2$$

←平行移動しても x^2 の係数は変わらない。

別解 求める放物線は, 放物線 $y = -3x^2 + 6x + 1$ を x 軸方向に3, y 軸方向に-2だけ平行移動したものだから, その方程式は,

$$y - (-2) = -3(x-3)^2 + 6(x-3) + 1$$

すなわち, $y = -3x^2 + 24x - 46$

- 120 ある放物線を x 軸方向に1, y 軸方向に-4だけ平行移動すると放物線 $y = 2x^2 + 8x + 9$ になるという。もとの放物線の方程式を求めよ。

- 121* ある放物線を x 軸に関して対称移動し, さらにそれを x 軸方向に3, y 軸方向に-2だけ平行移動したところ, 放物線 $y = x^2 - 2x + 5$ が得られた。このとき, もとの放物線の方程式を求めよ。

11 2次関数の決定

要点 1 2 次関数の決定

求める 2 次関数の式を, $y=a(x-p)^2+q$ や $y=ax^2+bx+c$ などにおいて考える。

必須

122 【2 次関数の決定】 次の条件を満たす放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ。

- (1)* 点 $(-2, 3)$ を頂点とし, 点 $(1, 6)$ を通る。
 □ (2) 軸が直線 $x=1$ で, 2 点 $(0, 1)$, $(3, 7)$ を通る。 ▶ 例 p. 57 例題 2

123 【連立 3 元 1 次方程式】 次の連立方程式を解け。

$$\square (1)* \begin{cases} x+y+z=13 \\ x+2y-z=7 \\ 3x-y+z=23 \end{cases} \quad \square (2) \begin{cases} x+2y+3z=7 \\ 2x+3y+z=8 \\ 3x+y+2z=9 \end{cases} \quad \text{▶ 例 p. 58 例題 3}$$

124 【2 次関数の決定】 次の 3 点を通る放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ。

- (1)* $(2, 0)$, $(0, 3)$, $(1, 4)$
 □ (2) $(-1, 5)$, $(1, -3)$, $(2, -1)$ ▶ 例 p. 58 例題 3

演習

- **125** 放物線 $y=x^2$ を平行移動したもので, 2 点 $(2, 1)$, $(3, 3)$ を通る放物線の方程式を求めよ。 → **122, 124**

応用

例題 11

放物線 $y=2x^2$ を平行移動したもので, 点 $(0, -2)$ を通り, 頂点が直線 $y=2x-6$ 上にある放物線の方程式を求めよ。

解 頂点が直線 $y=2x-6$ 上にあるから, 頂点の座標は $(p, 2p-6)$ とおける。放物線 $y=2x^2$ を平行移動した放物線であるから, 求める方程式は, 2 次の係数が 2 となるので, $y=2(x-p)^2+2p-6$ とおける。
 これが点 $(0, -2)$ を通るから, $-2=2(0-p)^2+2p-6$
 整理すると $p^2+p-2=0$ すなわち, $(p+2)(p-1)=0$
 したがって, $p=-2, 1$
 $p=-2$ のとき, $y=2(x+2)^2-10$
 $p=1$ のとき, $y=2(x-1)^2-4$
 よって, 求める放物線の方程式は, $y=2(x+2)^2-10, y=2(x-1)^2-4$

- **126*** 放物線 $y=-3x^2$ を平行移動したもので, 点 $(1, 2)$ を通り, 頂点が直線 $y=x+3$ 上にある放物線の方程式を求めよ。

12 2次関数の最大・最小

要点1 2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ の最大・最小

$a>0$ のとき, $x=p$ で最小値 q をとり, 最大値はない。

$a<0$ のとき, $x=p$ で最大値 q をとり, 最小値はない。

定義域が制限された2次関数の最大・最小は, 頂点と定義域の端点で考える。

要点2 2次関数 $y=ax^2+bx+c$ の最大・最小

$y=a(x-p)^2+q$ と平方完成してから求める。

必須

127 【2次関数の最大・最小】 次の2次関数の最大値, 最小値があれば, それを求めよ。また, そのときの x の値も求めよ。

☐ (1)* $y=x^2+4x+3$

☐ (2) $y=-2x^2-8$

☐ (3) $y=3x^2-12x+13$

☐ (4)* $y=-\frac{1}{3}x^2+4x+2$

▶**数** p. 60~61

128 【定義域が制限された2次関数の最大・最小】 次の2次関数の最大値, 最小値を求めよ。また, そのときの x の値も求めよ。

☐ (1)* $y=x^2-2x+3$ ($0\leq x\leq 3$) ☐ (2) $y=-x^2+4x-4$ ($-1\leq x\leq 3$)

☐ (3) $y=-2x^2-8x-5$ ($-1\leq x\leq 1$) ☐ (4)* $y=(x-2)(x-4)$ ($0\leq x\leq 2$)

▶**数** p. 61~62

演習

129 次の2次関数の最大値, 最小値があれば, それを求めよ。また, そのときの x の値も求めよ。ただし, a, b は定数とする。

☐ (1)* $y=x^2-2ax+b$

☐ (2) $y=-x^2+ax+b$

☐ (3) $y=-\frac{1}{2}x^2-ax-3b$

→ **127**

130 次の2次関数の最大値, 最小値があれば, それを求めよ。また, そのときの x の値も求めよ。

☐ (1)* $y=-\frac{1}{2}x^2+3x$ ($-1<x\leq 4$) ☐ (2) $y=2x^2-8x+5$ ($0<x<3$)

→ **127** ▶**数** p. 62

131 次の条件を満たす2次関数を求めよ。

☐ (1)* $x=-2$ で最小値 -1 をとり, $x=-1$ のとき $y=3$ である。

☐ (2) $x=0$ で最大となり, $x=3$ のとき $y=2$, $x=1$ のとき $y=6$ である。

☐ **132*** 2次関数 $y=2x^2-12x+c$ ($2\leq x\leq 5$) の最大値が4であるとき, 定数 c の値と, この関数の最小値を求めよ。

→ **128** ▶**数** p. 63 例題4

☐ **133** 2次関数 $y=-x^2+ax+b$ ($-2\leq x\leq 2$) は, $x=-1$ のときに最大となり, また, 最小値2をとる。このとき, 定数 a, b の値を求めよ。

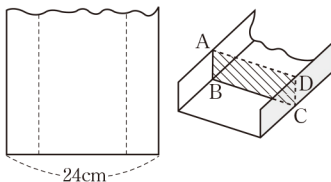
▶**数** p. 63 例題4

134 a を正の定数とする。2次関数 $y = -x^2 + 4x + 5$ ($-1 \leq x \leq a$) について、次の問いに答えよ。

- (1)* 最大値とそのときの x の値を求めよ。
 □(2) 最小値とそのときの x の値を求めよ。

▶[数] p. 178~181 探究5

- **135*** 幅が24cmの銅板を、図のように両端から同じ長さだけ 90° 折り曲げて水を流す溝を作る。溝の切り口を図のように長方形 ABCD として考えると、この面積を最大にするには、両端から何 cm だけ折り曲げればよいか。



▶[数] p. 64 例題5

- **136** 直角をはさむ2辺の和が20の直角三角形において、斜辺の長さ ℓ が最小になるのはどのようなときか。
- **137** あるコンビニでコーヒーを販売している。このコーヒーは1円値上げするごとに、2杯売れる数が少なくなるという。定価が110円の場合は1日に300杯売れるとすると、1日の売上を最大にするためには、定価を何円に設定すればよいか。

応用

例題12

a を定数とする。2次関数 $y = x^2 - 4ax + 8a + 1$ の最小値を m とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) m を a の式で表せ。
 □(2) m の最大値とそのときの a の値を求めよ。

方針

- (1) 2次関数の最大・最小を求めるときは、まず平方完成する。
 (2) m を a についての2次関数と考えて、最大値を求める。

解

- (1) $y = x^2 - 4ax + 8a + 1 = (x - 2a)^2 - 4a^2 + 8a + 1$
 よって、 y は $x = 2a$ のとき、最小値 $-4a^2 + 8a + 1$ をとるから、

$$m = -4a^2 + 8a + 1$$

- (2) (1)から、

$$m = -4a^2 + 8a + 1 = -4(a - 1)^2 + 5$$

 よって、 m は $a = 1$ のとき、最大値5をとる。

138* a を定数とする。2次関数 $y = x^2 + 2ax - a^2 + 4a + 5$ の最小値を m とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) m を a の式で表せ。
 □(2) m の最大値とそのときの a の値を求めよ。

例題 13

a を定数とする。2 次関数 $y=x^2-4x+2$ ($a \leq x \leq a+2$) の最小値とそのときの x の値を求めよ。

解 $y=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$

この 2 次関数のグラフは下に凸で、軸は直線 $x=2$ である。

(i) $a+2 < 2$, すなわち、 $a < 0$ のとき ←定義域が軸の左側にある。

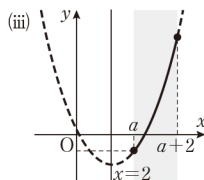
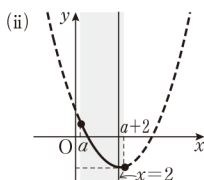
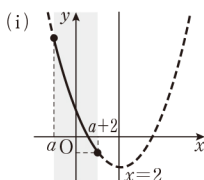
グラフは図(i)のようになり、 $x=a+2$ で最小値 a^2-2 をとる。

(ii) $a \leq 2 \leq a+2$, すなわち、 $0 \leq a \leq 2$ のとき ←定義域が軸を含む。

グラフは図(ii)のようになり、 $x=2$ で最小値 -2 をとる。

(iii) $a > 2$ のとき ←定義域が軸の右側にある。

グラフは図(iii)のようになり、 $x=a$ で最小値 a^2-4a+2 をとる。



- 139* t を定数とする。2 次関数 $y=x^2+2x$ ($t \leq x \leq t+2$) の最小値とそのときの x の値を求めよ。

例題 14

a を定数とする。2 次関数 $y=x^2-4ax+2$ ($0 \leq x \leq 4$) の最小値とそのときの x の値を求めよ。

解 $y=x^2-4ax+2=(x-2a)^2-4a^2+2$

この 2 次関数のグラフは下に凸で、軸は直線 $x=2a$ である。

(i) $2a < 0$, すなわち、 $a < 0$ のとき ←軸が定義域の左側にある。

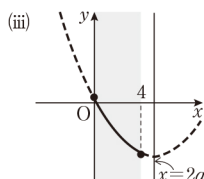
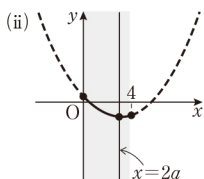
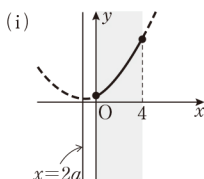
グラフは図(i)のようになり、 $x=0$ で最小値 2 をとる。

(ii) $0 \leq 2a \leq 4$, すなわち、 $0 \leq a \leq 2$ のとき ←軸が定義域の中にある。

グラフは図(ii)のようになり、 $x=2a$ で最小値 $-4a^2+2$ をとる。

(iii) $2a > 4$, すなわち、 $a > 2$ のとき ←軸が定義域の右側にある。

グラフは図(iii)のようになり、 $x=4$ で最小値 $-16a+18$ をとる。



- 140* a を定数とする。2 次関数 $y=x^2-2ax+3$ ($1 \leq x \leq 5$) の最小値とそのときの x の値を求めよ。

→ p.36 補充例題 20, 21