啓林館 高校数学 教育情報誌

啓林館

フォーカスゴールド Focus Gold 通信

vol.8

特集 フォーカスゴールド実践特集（1）
山口高校卒業生 Focus Gold 座談会

今回は，Focus Goldを使用し，難関大学に現役で合格した山口高校の卒業生と，指導された先生方に話を伺うことが出来ました。今回の座談会にご協力頂いたのは，山口高校の庄田敦紀先生・真名子良先生・卒業生の山本祐輝さん（東京大学理科Ⅰ類）・縄田知也さん（九州大学医学部医学科）・伊藤優作さん（大阪大学経済学部）・杉山沙貴さん（九州大学法学部）・竹内英人先生（Focus Gold著者）です。

以下の文章においてFocus GoldはFGと省略します。また，敬称も略させていただきます。

～座談会～

自己紹介

伊藤：文系だったのでⅠA，ⅡBを使用していました。基礎的なレベルから，大学入試の2次試験まで使える内容まで全て載っていたので，他の参考書を買わずにFGを1冊仕上げるだけで良かったことに感謝しています。

杉山：法学部なので，もう数学を勉強する必要はないけれど，今まで勉強してきた数学を忘れたくないし，FGの問題を解くことが好きなので，下宿先にも持って行っています。スペースはとりますが…(笑)

真名子：4人の学年の担任をしていました。今年も高校3年生を担当しております。

庄田：今回の座談会は，営業の方との立ち話から始まった企画ですが，実現してくれたのは本当にありがたく思っています。

縄田:FGの第一印象は，真っ黒でスタイリッシュでかっこよかった，この参考書を使いたいと思いました。現在の塾講師のバイトでも使用しています。

山本：最初の印象はよく分からなかったが，進めていくにつれて，この本はすごいなあと感じました。数学ⅡBは買った初日に読破したり，ⅢCについては，学校で購入する前に庄田先生にお願いして先に手に入れるくらいFGが好きになりました。今も後輩に数学を教える時には，FGを利用しています。

竹内：FGを作り始めた時から，「青チャートを超えるものを作りたい」，もっと言えば「日本一の参考書を作りたい」という思いで関わっています。FGを今よりも，もっと良いものにするために，今日はみなさんから忌憚のないご意見を伺えればと思っています。

FGの第一印象はどうでしたか？

編集部：山本さんは，最初はそれほどでもなかったと言っていましたが，いかがでしたか？

山本：まだ，1年生で参考書の問題を1つ1つ吟味（精査）するということをしていなかった事が大きいです。

編集部：縄田さんは，スタイリッシュでかっこいいと言ってくれていましたが，いかがでしたか？

縄田：最初に配られたときは，書店に並んでいるような参考書ではなく，真っ黒だしカバーも無かったので，数学の参考書だとは思いませんでした。でも，真っ黒でカバーが無いところが，スタイリッシュでかっこいいと思いました。

杉山：とにかく分厚いなと思いました。特に，解答も本体と同じくらい厚かったので，これからこれで数学を勉強するのかと思うと，おぞましいと思いました（笑）でも，庄田先生がFGをやっておけば大丈夫だと推薦してくれたので，やってみようという気になりました。

伊藤：参考書という存在をよく知らなかったので，最初にFGを渡されたときは，本の厚さにびっくりしましたが，中身は見やすかったです。ただ，カバンの中でスペースをとってしまうので，3年生でⅠA～ⅢCまで全てを持っていくのは大変でした（笑）

FGをどのように使用していましたか？

竹内：参考書は自学自習用に持たせているだけという学校も多いとよく聞きますが，皆さんは，授業中に横に置いたり，分からない問題を調べるために学校に持っていったりしていましたか？

伊藤：家では勉強できないタイプだったので，学校に持って行っていました。

杉山：私は，授業中に先生が「教科書のこの問題はFGのこの問題と似てる」と言った時に，その場でFGを開いて確認できるように，授業中は自分のそばに置いていました。教科書とFGのリンクはとても参考になったので，重かったけど毎日学校に持って行っていました。

竹内：公式集は使っていましたか？

杉山：普段は本体のまとめの方が詳しく書いてあるので使ってはいませんでしたが，模試の直前などに見たりして，気持ちを落ち着けていました。

編集部：授業中に教科書とリンクさせたり，学校に持っていくという話が出ましたが，普段どのような場面でFGを使用していましたか？

山本：どこにでも持って行って読んでいました。1年生の時も，部活の剣道の試合の合間（10分間）に読んだりしていました。

竹内：どこを読んでいましたか？コラムですか？例題ですか？

山本：ⅠAのチャレンジ問題の整数部分を考えていた事が記憶にあるので，問題を解きながら，分からない部分があったら，その部分を読んでいたと思います。

編集部：剣道の試合中に数学の式が浮かんできたりはしなかったですか？

山本：そこまでではなかったですけど…(笑)。とにかく，色々な場所に持って行って読んでいたのは覚えています。

編集部：縄田さんはどうでしたか？

縄田：僕も，学校に持って行っていました。普段は章末問題やSTEP UP問題を解いていたんですが，学校や塾でもらったプリントで分からない問題があった時には，FGで関連する問題の考え方や解き方を見たりして，「数学の辞書」として使用していました。

編集部：先生方はどのように指導されていましたか？

庄田：家に帰ったら，その日に授業で習った内容と同じ内容のFGの問題をやるようにと指導していました。また，テスト前には，FGの何ページから何ページまでの練習問題を全てノートに解いて提出するよう指導していました。正直，厳しいと思っていた生徒もいたと思います。

杉山：テスト前の勉強では，課題を始める時期を間違えたらしんどかったと思います。

縄田：特に，理数系のクラスだと1回のテストで100問は解いていました。

竹内：普段の授業を教科書とFGで進めているとの事ですが，傍用問題集などは使用していますか？

庄田：先程，FGを辞書的に使っていたという話も出たように，普段の授業から，FGを辞書的に使うということを意識して指導していました（特に，先生がいなくても，自分一人で辞書的に扱えるようになってほしかった）。そのため，傍用問題集を買うとFGをおろそかにする生徒が出てくると思ったので，使用していないです。

編集部：問題集を購入せずにFGを使用しているという話が出ましたが，長く使用しているとカバーなどが汚れてしまったかと思いますが，その点は気になりましたか？

縄田：確かに，表紙がすぐに白くなったり，消しゴムのカスなどが付いたりしました。だけど，逆に愛着が湧きました。

伊藤：汚れていた方が，綺麗なままよりも勉強しているという実感がありましたので，汚れなどは気にならなかったです。

山本：買って1ヶ月くらいで汚くなりましたが，僕自身はそういった点は気にならず，逆に愛着が湧きました。

杉山：私は逆に，綺麗なまま使い続けて合格してやるぞという気持ちで勉強していました。実際，今も綺麗な状態です。

FGのオススメ使用法と数学の勉強法

竹内：FGオススメ使用法はありますか？

山本：僕は頭からずっと読んでいました。そうすることで，内容のまとまりが分かり，単元ごとにどういった繋がりがあるか理解することが出来ました。特に，ⅠAの「整数問題」の部分はよく理解できました。「問題集などをやる前に，FGにざっと目を通し，どこにどのような内容があるかを軽く知っておく。そして，問題集などで分からない問題があればFGで確認する」という方法が良いと思います。

縄田：受験期になってから，取り組もうとしても分量がかなり多いので，普段から，授業などで扱った範囲をしっかりとこなすのが良いと思います。特に，「テスト期間中はFGだけをひたすら解く。授業で１周，テスト期間で2周の計3周くらいは解くと良いと思います。そして，受験期にチャレンジ編，実践編に取り組む。分からなかったら，マスター編に戻って復習する」という方法が良いと思います。

杉山：受験期にはFGカレンダーを用いて勉強しました。カレンダーには日ごとに問題番号が書いてあり，それを消していくのが好きでした。１周目は例題を読んで，その下の練習を何も見ないで解き終了後にはカレンダーに斜線を入れる。２周目は例題の解答を隠して解く。よくできていたら，問題番号に○と逆斜線，つまずいたら逆斜線のみを入れる。これを繰り返すことで，問題の理解度を一つずつ上げていきました。

伊藤：僕はとにかく，この１冊をやりきろう！と思って取り組んでいました。例題については，解いた回数だけ「正」の文字を付けていきました。また，解けた問題と解けなかった問題にマークの差をつけて，一目で分かるようにしていました。

竹内：現場からは自学自習できる参考書が求められていますが，丁寧に書きすぎたら丸暗記の生徒も出てしまいます。みなさんは，考えてもなかなか解けない問題はどのように対処していましたか？また，数学そのものの勉強の仕方はどのようにしていましたか？

山本：数学Ⅲの「置換積分」などは覚える部分も少しはありましたが，発想等を求められる問題ではとにかく考えました。その場で理解できなければ，お風呂などでも考えました。

縄田：分からない問題に出会った時の方が重要だと思います。すぐに答えを見るのか，解答を見てしっかり考えるのかで大きく変わってくると思います。僕は，解答をじっくり読んで，復習のために最初の公式に戻ったり，教科書に戻ったりしていました。

杉山：考えることに飽きるまでは考える。それでも分からなかったら，解答を見る。私は，閃くことが苦手なので，問題文のどこから解答の道筋などを閃くべきかを自分なりに分析していました。

改善点などあればお聞かせください

山本：強いて言うとしたら，例題の解説はしっかりしているが，「まとめ」がざっくばらんな部分が所々あったので，もう少し補足を入れてもらえたら，もっと見やすくなると思います。

縄田：まとめ⇔例題のリンクもあったら，より良いですね。

竹内：まとめの部分は現在の課題になっています。FGでは，定理の詳しい証明などは教科書に戻って確認してほしいという方針で作成しました。証明をまとめに載せることについては賛否両論あるのですが…詳しい証明もまとめにあった方がいいですか？

山本：ページ数の関係もあり，まとめに全て載せるのは大変だろうけど，自明なものではなく，少し分かりづらい部分については，載せて欲しいと思います。

竹内：ページ数の話題が出ましたが，現在，薄くする方法として，マスター編で1冊，チャレンジ編・実践編で1冊の2分冊化などの意見も出ていますがどうでしょうか？

縄田：受験用にⅠA～Ⅲまでのチャレンジ編をまとめて1冊にしたものがあれば嬉しいです。3年生で数学Ⅲを解いていて，ベクトルの復習をしたいと思った時に，1冊まるまる持っていかないといけないのは大変でした。

山本：1年生からチャレンジ編は見ていたのですが，ⅠAのチャレンジ編の中にⅡBの知識を使う問題もあるので，ⅠA～Ⅲまでまとめてあるものがあるのは良いと思います。

縄田：あと，チャレンジ編が全部で100問くらいあるので，本体に付けるのはある程度厳選して，残りの問題をまとめて1冊の問題集にするのも良いと思います。

竹内：現在，インターネットでFGの例題を解説したりしているのですが，本以外で何かこういったものがあるといいなというアイデアなどはありますか？

伊藤：例えば，数学が出来る人（生徒）によるFGの例題の別解を，先生がきちんと確認した上で，ネット上で配信するのはいいかなと思います。

縄田：「今月の挑戦状」みたいな形式で，問題を提示するのはどうでしょうか？そのような環境があれば，FGを知らない友達にFGの紹介をしやすくなると思います。

竹内：そのようなコンテストなどはあってもいいかもしれませんね。

最後に全国の後輩へメッセージをお願いします

山本：一貫した流れの中で，これ1冊で中堅私大から東大・京大までという事が掲げられているので，FGを信じて勉強すれば確実に力がつくと思います。これ1冊を信じて続けてほしいです。

縄田：分厚いですが，その分，どの参考書よりも解説がわかりやすく，個人的にはお薦めです。やるならこれ1冊だけで十分だと思います。FGは万能な，良い参考書だと思います。

杉山：FGとFGを研究し尽くした先生がいれば大丈夫なので，信じて頑張ってください。

伊藤：厚いので，最初は大変だと思うけど，進めていくうちに，数学を解く際に必要なことが何か分かってくるように例題も書かれています。「解く人のことを考えて作られた本」だと思います。この1冊を信じて勉強を続けてほしいです。

「山口高校での座談会を終えて」

Focus Gold編集委員　竹内英人

今回，FGを使っていただいている山口高校の先生方と，FGを使って勉強し，めでたく志望大学へ合格された4人の卒業生の皆さんとお話しをする機会をいただきました。座談会の詳しい内容は本文をご覧いただければと思いますが，私自身がこの座談会を通し感じたことを幾つか書き並べてみたいと思います。

まず，第一に「**参考書の利用法**」について。

庄田先生によれば，山口高校では，現在，教科書傍用問題集を使わずに，FGのみを使って日々の数学の学習に取り組んでいるそうです。入学後の始めのガイダンスで，庄田先生自ら「FGを信じて学習すれば絶対に大丈夫。ボロボロになるまで使い込んで欲しい」という話をされる，とのことでした。もちろん，それだけで生徒は自ら進んで取り組むことはないでしょう。その後，庄田先生，真名子先生を始めとする先生方の3年間を見通した，的確なご指導（使い方，進度の指示）のもとに，着実にFGをくり返し学ぶシステムが作り上げられています。生徒はその指導の下，安心してFGに専念することが出来るという訳です。

一般的に，参考書は，自学自習の補助的な役割として使わせたり，もしくは，長期休業中の課題，実力考査の教材（範囲）として利用している学校が多いと思います。つまり，基本的には教科書傍用問題集のような強制力は少なく，生徒の自主性に任せている。その結果，多くの生徒は本棚の肥やしにしてしまう場合が少なくないでしょう。

つまり，いくら良い教材を与えたとしても，指導者が「効果的な使用法」，「やる時期」，「学年別の使い方」など，参考書の正しい使い方を指導しなければ，ただ，「持たせているだけ」ということになりかねません。

先生方のFGへの取り組みのお話しを聞いていると，山口高校がFG一本で大きな成果を上げている背景にはこうした日頃からの先生方のご努力が大きいと感じました。

2つ目は「**くり返すことの大切さ**」です。

先に述べたように，山口高校では，先生方のきめ細やかなご指導の下，生徒はそれを信じて取り組めば自然とFGを終える事が出来るようになっています。しかし，そこからが山口高校の真骨頂でしょう。つまり，いかにして繰り返し，定着させるかという取り組みです。今回のメンバーの一人である，山本君は，この春，東大の理一に合格しました。山本君によれば，本番の二次試験の数学では開示結果が85点だったということです。今年の東大理系の問題は，相当な難問揃いだったので（詳しくはFG通信vol.5参照）85点といえば理三レベルでも十分に合格するレベルです。彼曰く，「FGはやり過ぎて，何回くり返したか分からない。いつも鞄の中にあったし，剣道の試合にも持参して，試合の合間にも読んでいたくらい，それくらい大好きだった。どの頁に，何が書いてあるかもほとんど頭の中に入っていた」一見，この話は大げさのような気もしましたが，実際にFGの内容についての話題が出たとき，「あの例題ですね。あれは…」と，我々著者以上に中身を良く覚えていることにびっくりしました。

彼に，どんな勉強法をしてきたのか尋ねると，「基本的にはFGと赤本だけ。とにかくFGのすべてを完璧にするまでくり返した」ということでした。その他の3人からも，「3周した」，「4周した」という話を聞いて，「くり返して学ぶことの大切さ」を改めて教えてもらったような気がします。

ともすると，我々，指導者は，生徒の学力をつけるべく，「とにかく沢山の問題を解かせる事が大事」と思いがちです。教科書に傍用問題集，参考書に数冊の入試問題集，それでも足りない気がして，さらにプリントを刷る。しかし，その一方で，「なぜ，これだけ沢山の問題を解かせているのに成果が上がらないんだろう」という思いを持っている先生方もいると思います。しかも，多くの進学校の生徒においては，学校の授業では飽き足らず，さらに予備校，塾に通って，さらなる教材に取り組んでいます。このような生徒を見ていると「やってもやってもなかなか出来るようにならない」という負のスパイラルに陥っているように見えてなりません。

一方で，山口高校のように一つの教材をくり返し取り組ませ，確実に効果を上げている学校もある，ということです。

この事実は，単に「どの教材が良い」，「どれだけやらせたら良い」といったレベルではなく，我々指導者自身が，もう一度，「生徒に真の学力をつけるためには何が必要か」という問題に真剣に向き合う時期が来ているように思えます。

以前，ある進学校の先生がこんな事を言っていました。「自分たちも，生徒に与え過ぎである事は分かっているんだけど，もし量を減らし結果が出なかったときのことを考えると怖いから，今の方法をなかなか変えることが出来ない」と。

この先生のおっしゃる気持ちもよく分かります。それでも敢えて私は全国の先生方，特にFGを使っていただいている学校の先生方に声を大にして言いたいと思います。

『そろそろ，量に頼る指導はやめませんか？今こそ量から質に転換するチャンスです』

我々著者も，今まで以上に，「FG一冊で十分だった」と言われるような，先生方，生徒さんに納得していただける本作りをしていきたいと考えています。

今回の山口高校の先生，生徒さんからは大きなヒントとパワーをいただきました。

最後に，このような機会を作っていただきました，山口高校の庄田先生，真名子先生に心より感謝いたします。

特集 フォーカスゴールド実践特集（2）竹内先生の出前授業 ～島根県石見智翠館高等学校～

1．竹内先生の授業の目的

石見智翠館高等学校　智翠館特別コース部長
細木康弘（国語科）

今回，竹内先生にお越しいただき，授業及び研修の講師をしていただいたのには2つの目的がありました。1つ目は，生徒が数学に興味を持ち，FGを効果的に使用することで力をつけ，入試において差がつきやすい数学に早い段階から取り組むようにすること。2つ目には若い教員の指導力向上でした。

まず生徒についてですが，地方の生徒と中高一貫校で鍛えられている生徒とは特に数学と英語に力の差があると思いますが，私共のような中高一貫校でない高校が，難関大学を目指すには高校1年生の過ごし方が非常に重要であると考えています。そこで1年次に数学の面白さを体験し興味を持つことで日々の学習を継続する生徒が増えること，そして難しい問題に目を向ける前に，まずは基本の大切さを理解して欲しいという思いがありました。もちろん数学的思考力を身につけて欲しいとか，大学に入ってからもしくは就職する時にも必要等，人それぞれ数学を学ぶ意味はあると思いますが，難関大学に入りたい生徒の目標を叶えるためには，どうしても合否に大きく影響を及ぼす数学には早くから力を入れる必要があります。

数年前FGを採用させていただく前に，数学を伸ばすためにどうしたらよいか悩んでいた際，いろいろな問題集や参考書等を個人的に調べていました。そのような折，他県の先生から紹介していただいたのがFGでした。解説の詳しさ，コラムの面白さ，自学自習のしやすさ等の理由から採用させていただきました。それ以来継続して採用させていただいておりますが，とにかく生徒からの評判が良くこの1冊を仕上げれば難関大学にも対応できると絶対の信頼をおいてそれぞれが活用してくれています。しかし，1年生の初期段階ですと，量の多さに圧倒されてしまう生徒が出てくるので，早い時期にFGを作成された先生にお越しいただき，FGを上手く自分で活用する方法を学ぶことで基本から応用までの力をつけることができ，目標とする大学の問題まで十分対応できるのだという見通しを持たせたいという狙いがありました。決してやらされて勉強するのではなく，自発的に信頼してFGと向き合っていく姿勢を養いたいという思いがありました。

2つ目の教員の指導力を向上という狙いですが，今まで教員も進度や生徒の理解定着を考え，FGを授業で扱うのか，講習で扱うのか，テストで出題するのか，週末課題にするのか等模索しながら活用しているようにみえました。そこで，効果的な活用の仕方を直接竹内先生から学ぶことができれば，その後教員が自信を持って今の生徒を指導でき，最終的には生徒の目標達成という形で還元できるのではと考え，高校1年生の時期に竹内先生にお越しいただきたいというお願いになりました。特にちょうど確率も終わった時期で，生徒の中で苦手意識を持ち始める生徒が出てきていた時期でしたので本当に良いタイミングでお越しいただけたと思っております。

2．授業を終えて　竹内英人

今回，出前授業の御依頼をいただいた際には，2つのテーマをいただきました。1つは，実際にFGを教材として取り上げ，どのようにFGを学習していけば良いかという指針を示すこと。もう1つは，数学の面白さ，学ぶ面白さを伝え，生徒達に主体的な学びへと誘うこと。

こうした要望を受けて，私自身が掲げた授業のコンセプトは次の2つでした。

①基礎の大切さを伝える
②ストーリー性（系統性）を大事にする

①については，一般的に生徒は「基礎」は簡単なものだと軽視しがちですが，実際に定義を書かせたり，公式の導き方を聞いてみると正確に答えられる生徒は多くはありません。つまり，彼らにとっての「基礎」とは，単なる知識の暗記（公式の暗記）であったり，基本的な問題が解けるというレベルに過ぎません。今回の授業では「重複組み合わせ」というテーマを扱いましたが，単に「重複組み合わせ」という知識，公式に頼るのではなく，自分自身の言葉でもう一度とらえ直すところからスタートし，言葉と数式の関連付け，図で表すことによるイメージ化を通し，自分の言葉で「重複組み合わせ」という考え方を表現することに重点を置きました。内容的には決して新しいものではなく，普段の授業で取り扱った内容であったと思います。しかし，今回，自分の言葉で理解することによって，本当の意味での基礎が身についたのではないかと思います。

②については，私自身が授業をする上で一番，重要視している点です。ストーリー性といっても色々あります。例えば，微積分の授業をする際に，数学史の流れに沿って授業を組み立てるといった方法もその1つでしょう。ただ，私の一番好きなストーリーというのは，1つのテーマについて基本的な内容から始め，最終的にはそのテーマに関する発展的な内容まで一気に上り詰めるという流れです。しかもその最終的なゴールは決して生徒の手が届かないものではなく，基礎から順々に積み上げていく中で，たどり着くことが出来るものです。一見，今日のテーマとは何の関係があるのか？と思える問題も，実は表現を変えただけで本質的には基本問題と同じである。そこに気づけたとき，初めて基礎・基本の大切さと，数学は積み重ねの学問であるということに気づくのではないかと思います。　今回はFGの基本問題から始め，最終的にFGのチャレンジ編にある，京都大学の問題や，その他の入試問題に挑戦しました。完全に自力でたどり着いた生徒はそれほど多くはありませんでしたが，それでも多くの生徒は，「基礎・基本を大事にして，それらを積み重ねることによって，京大の問題でさえ解くことが出来るんだ」ということを実感できたのではないかと思っています。

また，FGを題材に授業をすることによって，FGの具体的な使用法も織り混ぜながら，説明しました。その上で，「分かる」，「出来る」という喜びを実感してもらい，さらには数学という教科の面白さを伝え，生徒自身が，「もっともっと自分で問題を解いてみたい」「深く考えてみたい」という主体的な学びにつながるように授業を構成してみたつもりです。

3．授業を受けた生徒の感想

実際に授業を受けた生徒のみなさんからもたくさんの感想をいただきました。ここでは，その一部をご紹介します。

「私はこれまで数学という科目にすこしばかり苦手意識を持っていましたが，このたび，竹内先生に授業をしていただいたことが数学を好きになるきっかけとなりました。

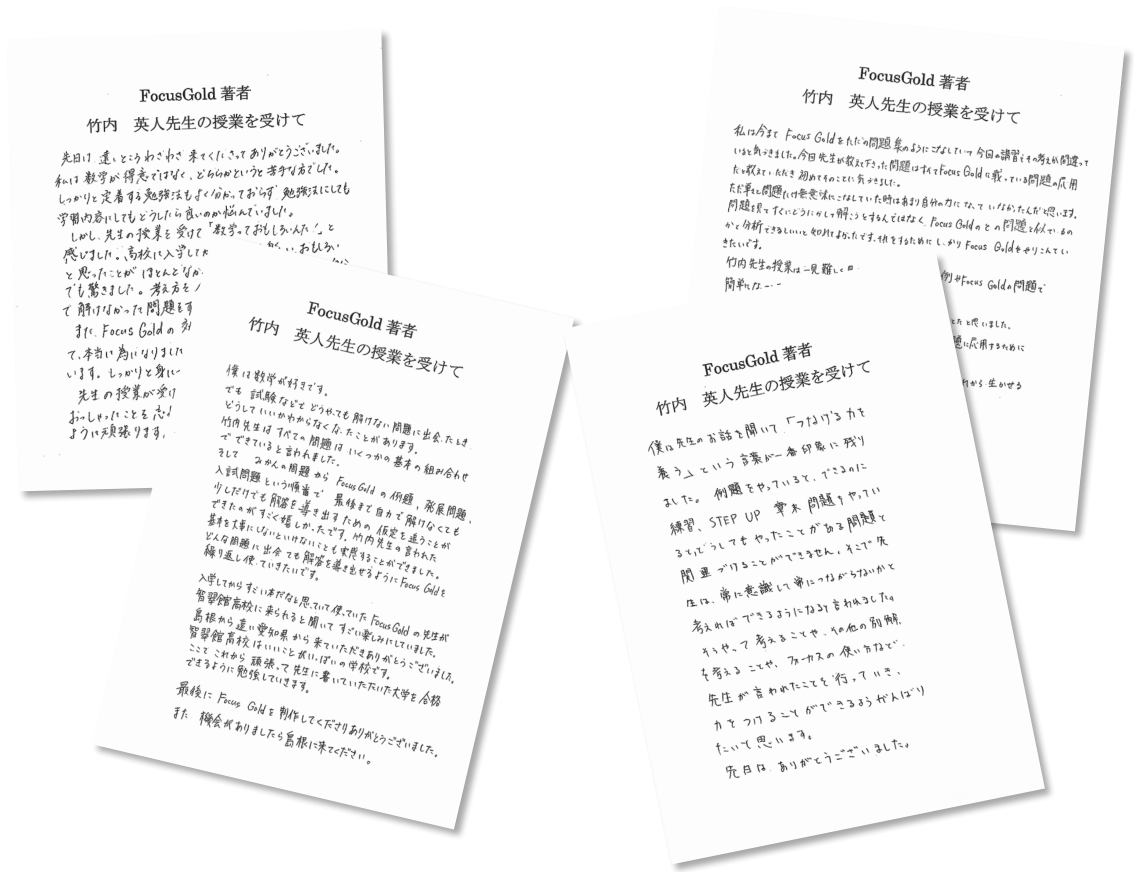
竹内先生の授業で学んだことは主に2つです。1つ目は，日本語の説明を“丁寧に”書くことです。今まで私は自分が分かるようにしか説明文を書かず，解答を見る人のことを考えていませんでした。2つ目は，“1つの問題から多くを学ぶ”ことです。1つの問題を解いたら終わりというのではなく，違う問題を関連付けたり，別解を考えたりと1つ1つの問題に素直にしっかりと向き合いたいと思います。これ以外にもたくさんありますが，竹内先生から学んだことをこれからの学習に活かしていきたいと思います。そして，竹内先生や竹内先生とお会いする機会を作ってくださった先生方に感謝したいと思います。本当にありがとうございました。」

「私は今日の授業を受けて，自分が今までどれだけ適当に問題を解いていたかということがわかりました。「問題の重要だと思うところにマークをする，問題を別の言葉で言い換えてみる。」問題を解くうえでは基本的なことなのに私はそれを

やっていませんでした。今回の授業で「採点者に伝わる答案」というお話がありました。模試のときだけでなはなく日頃問題を解くときから説明や途中の式が書いてあり流れのわかる答案を意識していかなければならないと思いました。これからはもっと基本を大切にして楽しく数学を学習していきたいと思います。」

「まず初めに，先週愛知県からわざわざ島根まで来て下さりありがとうございました。
私は授業を受けた時，まず場合の数をやるのかと思いました。先生の説明を聞いた後，周りの人はスラスラ解いているのに，私だけできないのか，と思っていた時，竹内先生は丁寧に「こうしたらいいんだよ。」と教えて下さり，とてもうれしかったです。
私が印象に残っているのは，数学をドラエもんに例えてやるというのはとてもすごかったと，今でも覚えています。
いつもの私なら，絶対に解けなかった問題が，竹内先生の授業ではびっくりするくらいに，あっというまに解けました。
そしたら，1問解けたらもっと他の問題をやりたいという気持ちになりました。
正直，その時は授業という感じはしませんでした。
私は授業が終わった後，もっと先生の楽しい授業を受けたい，分からない所を一緒に解いてほしいと思いました。私は，今まで数学の授業をもっと受けたいという気持ちになったことがありませんでした。だから，また石見智翠館高校に来て下さることを楽しみに待っています。
その時には，もっとレベルアップしているように，Focus Goldとかをたくさん利用して頑張っていきたいです。
今回，このような場を作るのに携わった人たちに感謝の気持ちも忘れずに，自分の志望大学を目指して頑張ります!!
本当にまた来て下さい!!」

これ以外にも，ここでは紹介しきれないたくさんの感想をいただきました。ありがとうございました。



4．授業をご覧いただいた先生の感想

「フォーカスゴールド代表執筆者　竹内英人先生に，本校智翠館特別コース1年生を対象に「重複組み合わせ」の基本から応用に至るまでの授業を行っていただきました。まず，決して「重複組み合わせ」という言葉を使われない竹内先生の授業展開に基本の理解を徹底させたい意気込みが伝わってきました。導入部分では，代表的な例題に対して本校生徒が思った以上に出来ないことで，心中「ゲッ」と驚かれたと思いますが，冷静に丁寧に対処され，＊4つの問題へ生徒を誘導され，最終的には京都大学の入試問題にもチャレンジできる勇気を生徒達に実感させ，竹内先生のストーリーに生徒がのって生き生きと数学の問題に向き合っている姿に感服しました。
　本校智翠館特別コースでは，フォーカスゴールドを活用しています。自学自習のやりやすい参考書として生徒の評判も良く，＊4つレベルの問題は授業中に説明を加えています。ただ，私の取り組みとしては，＊4つレベルの問題が解ければ「とりあえず良し」としてしまうイメージがあり，このレベルの問題で別の解法などに力を注ぐことが多いのですが，これを主体にしてしまうと，それ以上のチャレンジは生徒任せになってしまうということを改めて反省させられました。無限の可能性を秘めている生徒に，フォーカスゴールドを最高レベルと感じさせ，そのマスターを頑張らせることは，ある意味生徒に上限を示唆してしまっている，それよりもフォーカスゴールドで基本徹底ができれば更に難解な問題にもチャレンジできることを具体的に示してやることで，無限のチャレンジ精神を示唆できることを教えていただきました。
　数学の苦手な生徒には，＊2つまででいいからとか，数学が得意な生徒にはチャレンジ編に挑戦してみようとか，こちらの思い込みで生徒のレベルを計り，それに見合う努力をさせることが良いと決めつけていた私に，生徒の可能性を探る大切さを教えていただいた気がします。これからもフォーカスゴールドを活用し，生徒の数学力をつけていくことに変わりはありませんが，もっと主体的に問題に向き合える生徒を育てられるのではないかという自信をいただくことができました。竹内先生ありがとうございました。」
（石見智翠館高等学校教頭　土佐泰司（数学科））

「この度，本校智翠館コース1年の私の数学の授業見学と竹内先生による同クラスの数学の授業を行っていただきました。私の授業においては，自分自身失敗だと思っていたところも，また，それ以外のところに関しても，的確な指導や改善法などを教えていただきました。その後に見学させていただいた竹内先生の授業の範囲は，場合の数の重複組み合わせについてでした。内容として，FocusGoldの基盤となるマスター編の問題を丁寧に解説し，ほとんどの生徒たちが理解したところで発展問題へと進み，最後にはチャレンジ編にある大学入試問題まで終えるというものでした。生徒を見ていると，丁寧な解説により基礎をしっかりと理解し，その後の竹内先生の誘導に乗せられることで，自分の力で入試問題に立ち向かうことのできる自信を付けたように感じました。それは，竹内先生の一連のストーリーとなった完成された授業と，生徒自身がやらされているのでは無く，自分から進んでいるように思える誘導の上手さがあってこそのもので，私もそのような授業の進め方の勉強がもっと必要であると学びました。また，良い授業づくりには，より時間をかけた準備が必要であり，ひとつの授業のための準備と，入試までの先を見据えたスケジュール作りなど，様々な準備が大切であり，私の準備はまだまだ足りていなかったことを実感いたしました。
　以上のように，竹内先生の授業を見ることでとても勉強になることが多く，また，私の授業と比較しこれから自分はどのようなところに重点を置き成長していけば良いかの目安を知ることができました。竹内先生，私の授業に対するご指導ご鞭撻及び，授業の見学につきまして誠にありがとうございました。次の機会があればまたよろしくお願いいたします。」
（石見智翠館高等学校　数学科・情報科　大石卓）

「分野としては場合の数の授業をしていただきましたが，私は数学の教員ではないので，細かい点は数学科の教員に任せ，全体の印象を書かせていただきたいと思います。

FGの基本問題～応用問題そしてそれが入試問題（京大）にも応用できるところまでを一気に駆け上がっていく流れもテンポもすべてが洗練された授業でした。授業を受けた生徒達は改めてFGを信じて学習していけば大丈夫だという安心感と信頼を持つことができたように思います。そして再度基本の大切さを理解してくれたように思います。授業では，応用問題が基本問題を組み合わせて作られていることを知り，基本が繋がっていくことの面白さや，数学の問題を解くことの面白さなどをそれぞれが体験させていただきました。その他，出題者の視点に立った物の見方など，2時間の授業で基本から応用へ，そして様々な視点へと竹内先生の巧みで緻密な授業展開のもと生徒達は学びを楽しんでいました。私も高校の低学年の時に先生のような授業を受けることができていたら…。と思わずにはいられないような密度の濃い授業でした。分かること考えることがこれほど楽しいことなのかと他教科ながら思わされました。授業の内容については他の数学科の教員の感想をお読みいただけたらと思いますが，授業の組み立てや狙いなどをはっきりさせるという授業準備の重要性を改めて勉強させていただきました。本当にありがとうございました。」

（石見智翠館高等学校　国語科　細木康弘）

5．終わりに　竹内英人

今回，石見智翠館高校から，若い先生への授業研修と出前授業という貴重な機会をいただきました。新任の大石先生の授業に関してはかなり厳しい指摘をしましたが，それは，大石先生の中に，本当に成長したいという姿が見えたからです。大石先生には，「一年後，また見に来るから」と約束しました。一年後の大石先生がどれだけ，素晴らしい授業をしてくれるか今から楽しみです。

また，今回の出前授業については，私自身，本当に楽しく授業を行うことが出来ました。素直で前向きな生徒達が一生懸命，私の授業に参加してくれたことに感謝します。授業中の一人一人の素晴らしい表情は一生忘れることは無いと思います。

今回の出前授業が成功したかどうかは，生徒自身に聞いてみないと分かりませんが，私自身は，現時点での持てる力をすべて出し切ったつもりなので，大変満足しています。

「またいつか，FGで学んで成長した彼らを教えたいなぁ」と心から思った一日でした。

最後に，今回，このような素晴らしい機会を与えて下さった，石見智翠館の細木先生，土佐先生，そして，自分自身に新任の頃の初心に戻らせてくれた大石先生，さらには，FGを心から愛してくれている石見智翠館の生徒さんに感謝をいたします。

複素数平面の有用性を考える（その4）

Focus Gold・Focus Up
編集委員
豊田 敏盟
Toshiaki Toyoda

前回のGOLD通信では，「鏡映の反転」$w=\dfrac{1}{z}$ による図形の変換について説明しました。

今回は変換 $w=z^2$ による，直線，円，2次曲線の移動について考えたいと思います。

本稿のテーマ
複素数平面上で，$w=z^2$ によって定まる図形の変換を考える

1．変換 $w=z^2$ の図形的意味

本題に入る前に，変換 $w=z^2$ の図形的意味を考えましょう。

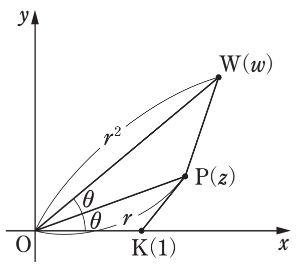
複素数 z を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r\geqq 0)$

$w=z^2$ で定まる複素数 w を，$w=R(\cos\phi+i\sin\phi)$ $(R\geqq 0)$ とおく。

複素数平面において，原点 O，点 K(1)，点 P(z)，点 W(w) とすると，

$$w=z^2=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$$

より，$R=r^2$，$\phi=2\theta$ となる。



△WOP と △POK において，

$$\angle\mathrm{WOP}=\left|\arg\frac{w}{z}\right|$$
$$=|2\theta-\theta|$$
$$=|\theta|=\angle\mathrm{POK}$$

また，OW : OP$=r^2 : r=r : 1=$OP : OK

よって，△WOP∽△POK

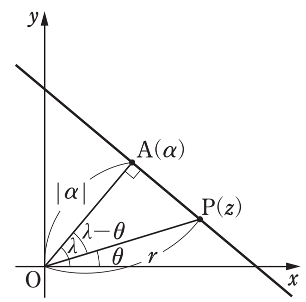
したがって，$w=z^2$ は，点 P(z) を原点のまわりに θ 回転し，OW$=r\cdot$OP となる点 W に移す変換である。

（つまり，点 w は $\arg w=2\theta$，$|w|=$(OP の r 倍) である点）

2．$w=z^2$ による直線の変換

(1) 原点を通らない直線はどのような図形に移るか。

原点 O と異なる点 A(α) （α は複素数，$\arg\alpha=\lambda$）を通り直線 OA に垂直な直線 l 上の任意の点 P(z) について，$w=z^2$ による変換を考える。



$$\alpha=|\alpha|(\cos\lambda+i\sin\lambda)\quad(|\alpha|>0)$$

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0)$ とすると，

$\angle\mathrm{OAP}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{AOP}=|\lambda-\theta|$ より，

$$r\cos(\lambda-\theta)=|\alpha|\quad\cdots\cdots①$$

点 Q(w)，$w=R(\cos\phi+i\sin\phi)$ $(R\geqq 0)$ とすると，

$$R=r^2,\ \phi=2\theta \text{より},\ r=\sqrt{R},\ \theta=\frac{\phi}{2}\quad\cdots\cdots②$$

②を①に代入する。

$\sqrt{R}\cos\left(\lambda-\frac{\phi}{2}\right)=|\alpha|$ ……①′

①′の両辺を平方すると，$R\cos^2\left(\lambda-\frac{\phi}{2}\right)=|\alpha|^2$

$R\cdot\frac{1}{2}\{1+\cos(2\lambda-\phi)\}=|\alpha|^2$

$R=\frac{2|\alpha|^2}{1+\cos(2\lambda-\phi)}$

これを極方程式とみると，(離心率)$=1$ より放物線を表す。

つまり，原点を通らない直線は放物線に変換される。

(2) 原点を通る直線はどのような図形に移るか。

原点Oを通り，実軸となす角δ(>0)である直線上の点P(z)は，$|z|=r(>0)$ とすると，

$z=r(\cos\delta+i\sin\delta)$

または，$z=r(\cos(\pi+\delta)+i\sin(\pi+\delta))$

となる。

よって，$w=z^2$ より，

$w=r^2(\cos 2\delta+i\sin 2\delta)$,

$w=r^2(\cos(2\pi+2\delta)+i\sin(2\pi+2\delta))$

これは双方とも同一の半直線を表す。

つまり，原点を通る直線は，原点Oを始点とし，実軸となす角$2\delta(>0)$の半直線に変換される。

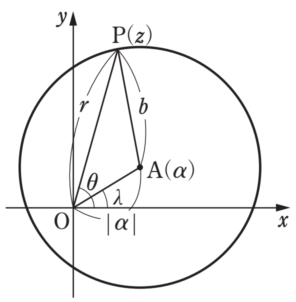
3．$w=z^2$ による円の変換

原点Oの複素数平面で，点A(α)（αは複素数，$\arg\alpha=\lambda$）を中心，半径$b(>0)$の円C上の任意の点P(z)について，$w=z^2$による変換を考える。

$\alpha=|\alpha|(\cos\lambda+i\sin\lambda)$

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　$(r\geqq 0)$

とする。



図の△POAにおいて，余弦定理より，

$b^2=r^2+|\alpha|^2-2r|\alpha|\cos(\theta-\lambda)$

$2r|\alpha|\cos(\theta-\lambda)=r^2+|\alpha|^2-b^2$

両辺を平方して，

$4r^2|\alpha|^2\cos^2(\theta-\lambda)=(r^2+|\alpha|^2-b^2)^2$

$4r^2|\alpha|^2\frac{1+\cos2(\theta-\lambda)}{2}=(r^2+|\alpha|^2-b^2)^2$

よって，$2r^2|\alpha|^2\{1+\cos(2\theta-2\lambda)\}=(r^2+|\alpha|^2-b^2)^2$

ここで，$w=z^2$ で定まる点Q(w)を，

$w=R(\cos\phi+i\sin\phi)$　$(R\geqq 0)$ とすると，

$R=r^2$，$\phi=2\theta$ より，

$2R|\alpha|^2\{1+\cos(\phi-2\lambda)\}=(R+|\alpha|^2-b^2)^2$

となる。整理すると，

$2R|\alpha|^2\cos(\phi-2\lambda)=R^2-2Rb^2+(|\alpha|^2-b^2)^2$ ……③

(i)　$|\alpha|=0$　(円Cの中心が原点)の場合

③は $R^2-2Rb^2+b^4=0$ より，$(R-b^2)^2=0$ で $R=b^2$

よって，$w=z^2$ の変換で，原点中心，半径bの円Cは，原点中心，半径b^2の円に移る。

これは，1の「変換 $w=z^2$ の図形的意味」からすれば当然である。

(ii)　$|\alpha|=b$　(円Cが原点を通る)の場合

③は$2Rb^2\cos(\phi-2\lambda)=R^2-2Rb^2$

ここから，$2b^2\cos(\phi-2\lambda)=R-2b^2$ ……④

または $R=0$

④は，$R=2b^2\{1+\cos(\phi-2\lambda)\}$ となり，これはカージオイド曲線を表す。

また，$R=0$ はこのカージオイドに含まれる(このとき，$\phi-2\lambda=\pi$)。

よって，原点を通る円Cは，カージオイド曲線に変換される。

この他，③がどのような図を表すのか解析しにくいので，$\lambda=0$，$|\alpha|=1$ とすると，③は，

$2R\cos\phi=R^2-2Rb^2+(1-b^2)^2$ ……⑤

となるが，やはり見当がつきにくい。

そこで，$w=R(\cos\phi+i\sin\phi)=X+Yi$

(X，Yは実数)とおくと，

$R\cos\phi=X$，$R^2=X^2+Y^2$，$R=\sqrt{X^2+Y^2}$

であるから，⑤は，

$2X=X^2+Y^2-2\sqrt{X^2+Y^2}\,b^2+(1-b^2)^2$ ……⑤′

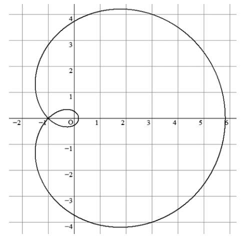
となる。

(iii)　半径$b>1$(円Cの内部に原点がある)の場合

仮に，$b=\sqrt{2}$ とすると，⑤′は，

$X^2+Y^2-4\sqrt{X^2+Y^2}-2X+1=0$

これを関数グラフソフトGRAPESで描くと，下図のようになる。

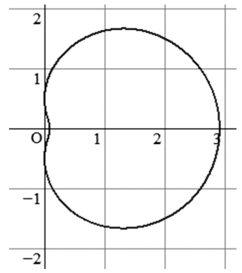


(iv)　半径$b<1$(円Cの外部に原点がある)の場合

仮に，$b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ とすると，⑤′は，

$X^2+Y^2-\sqrt{X^2+Y^2}-2X+\frac{1}{4}=0$

同様にして図を描くと，下図のようになる。



つまり，(iii)，(iv)から，円Cが原点を通らない場合，変換後の図はパスカルの蝸牛曲線の仲間である。

4．$w=z^2$ による双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ の変換

座標平面上の双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$　$(a>0,\ b>0)$ を複素数平面に重ねる。

その双曲線上の任意の点をP(z)とすると，

$z=x+yi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

x，yは実数より，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ であるから，双曲線の式は，

$\frac{r^2\cos^2\theta}{a^2}-\frac{r^2\sin^2\theta}{b^2}=1$

$r^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}-\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)=1$

$r^2\left(\frac{1+\cos2\theta}{2a^2}-\frac{1-\cos2\theta}{2b^2}\right)=1$

$r^2\{(b^2+a^2)\cos2\theta+(b^2-a^2)\}=2a^2b^2$ ……⑥

$w=z^2$ で定まる点Q(w)を，

$w=R(\cos\phi+i\sin\phi)$　$(R\geqq 0)$ とすると，

$R=r^2$，$\phi=2\theta$ より，⑥は，

$R\{(b^2+a^2)\cos\phi+(b^2-a^2)\}=2a^2b^2$ ……⑥′

となる。

$w=R(\cos\phi+i\sin\phi)=X+Yi$ (X，Yは実数)とすると，

$R\cos\phi=X$，$R=\sqrt{X^2+Y^2}$ であるから，⑥′は

$(b^2+a^2)X+(b^2-a^2)\sqrt{X^2+Y^2}=2a^2b^2$ ……⑦

となる。

(i)　$a=b$　(直角双曲線)のとき

⑦は $2a^2X=2a^4$ より，$X=a^2$

よって，直角双曲線は，直線 $X=a^2$ に変換される。

(ii)　$a\neq b$ のとき

⑦は，$(b^2-a^2)\sqrt{X^2+Y^2}$
$=-(b^2+a^2)X+2a^2b^2$ ……⑦′

⑦′の両辺を平方し，整理すると，

$4a^2b^2X^2-4a^2b^2(b^2+a^2)X$
$-(b^2-a^2)^2Y^2+4a^4b^4=0$

$4a^2b^2\left\{\left(X-\frac{b^2+a^2}{2}\right)^2-\frac{(b^2+a^2)^2}{4}\right\}$
$-(b^2-a^2)^2Y^2+4a^4b^4=0$

$4a^2b^2\left(X-\frac{b^2+a^2}{2}\right)^2-(b^2-a^2)^2Y^2$
$=a^2b^2(b^2-a^2)^2$ ……⑦″

⑦″の式は双曲線を表す。

ただし，⑦′から，$0<b<a$ なら，$\frac{2a^2b^2}{b^2+a^2}<X$

$0<a<b$ なら，$X<\frac{2a^2b^2}{b^2+a^2}$

よって，$a \fallingdotseq b$ のときは，双曲線の一部に変換される。

また，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0,\ a \fallingdotseq b)$ の $w=z^2$ による変換は，双曲線と同様に考えると，楕円は楕円に変換されることがわかります。

しかし，放物線 $y^2=4mx+n$ $(m>0)$ の変換は，m，nの値による分類と図形との関連性が見分けにくく，今回は諦めました。

次に前号のGOLD通信でお願いした，「鏡映の反転」による放物線 $y^2=4mx+n$ $(m>0)$ の変換について，私の考えを述べます。

5．「鏡映の反転」$w=\dfrac{1}{z}$ による放物線 $y^2=4mx+n$ $(m>0)$ の変換

座標平面上の放物線 $y^2=4mx+n$ $(m>0)$ を複素数平面に重ねる。

放物線上の任意の点を $\mathrm{P}(z)$ とすると，

$z=x+yi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

x，y は実数より，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ であるから，放物線の式は，

$r^2\sin^2\theta=4mr\cos\theta+n$ ……①

となる。

また，「鏡映の反転」の変換 $w=\dfrac{1}{z}$ により，点 $\mathrm{P}(z)$ が点 $\mathrm{Q}(w)$ に移るとし，

$w=R(\cos\phi+i\sin\phi)$

とすると，$R=\dfrac{1}{r}$，$\phi=-\theta$ となるから，①に $r=\dfrac{1}{R}$，$\theta=-\phi$ を代入して，

$\dfrac{1}{R^2}\cdot\sin^2\phi=4m\cdot\dfrac{1}{R}\cdot\cos\phi+n$

よって，$nR^2+4mR\cos\phi-\sin^2\phi=0$ ……②

を得る。

(i) $n=0$ （頂点が原点の放物線）とすると，

②は，$4mR\cos\phi=\sin^2\phi$

となる。

$m \fallingdotseq 0$ より，

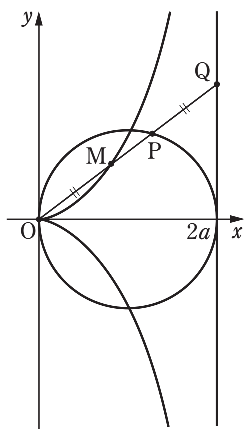
$R=\sin^2\phi\cdot\dfrac{1}{4m\cos\phi}$

$=\dfrac{1}{4m}\tan\phi\sin\phi$

となり，これはシッソイド曲線（疾走線）を表す。

つまり，頂点が原点の放物線はシッソイド曲線に移る。

シッソイド曲線とは，円 $(x-a)^2+y^2=4a^2$ 上の動点Pについて，直線OPと直線 $x=2a$ との交点をQとするとき，半直線OP上の $\mathrm{OM}=\mathrm{PQ}$ である点Mの軌跡である。



この軌跡は，実数平面上での式は

$x^3+(x-2a)y^2=0$

極方程式では

$r=2a\tan\theta\sin\theta$

と表せる。

なお，図は，$4m=1$，$a=\dfrac{1}{2}$ のときのシッソイド曲線である。

(ii) $n \fallingdotseq 0$ とし，②を R の2次方程式とみて，

$$R=\frac{-2m\cos\phi\pm\sqrt{4m^2\cos^2\phi+n\sin^2\phi}}{n}$$

$\sin^2\phi=1-\cos^2\phi$ を代入して整理すると，

$$R=\frac{-2m\cos\phi\pm\sqrt{(4m^2-n)\cos^2\phi+n}}{n} \quad \cdots\cdots③$$

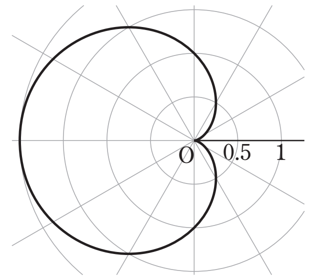
となる。

(ii)-1 根号を定数にするため，$n=4m^2$ とおくと

③は，$R=\dfrac{-2m\cos\phi\pm\sqrt{4m^2}}{4m^2}$

$=-\dfrac{1}{2m}(\cos\phi\pm1)$

これはカージオイド曲線の式で，仮に $2m=1$ とすると図は次のようになる。



つまり，放物線 $y^2=4mx+4m^2$ はカージオイド曲線に移る。

(ii)-2 $n \fallingdotseq 4m^2$ のとき，③はどのような図を表すか判断できない。

そこで，②を直交座標平面に重ねることにする。

$w=R(\cos\phi+i\sin\phi)=X+Yi$ （X，Y は実数）とすると，

$R\cos\phi=X$，$R\sin\phi=Y$，$R^2=X^2+Y^2$

であるから，②は，

$$n(X^2+Y^2)+4mX-\frac{Y^2}{X^2+Y^2}=0$$

よって，

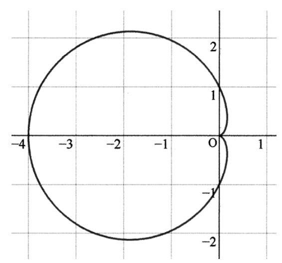
$n(X^2+Y^2)^2+4mX(X^2+Y^2)-Y^2=0$

$(m>0,\ n \fallingdotseq 0,\ n \fallingdotseq 4m^2)$

ここで，仮に $n=1$ とすると，

$(X^2+Y^2)^2+4m\,X(X^2+Y^2)-Y^2=0$

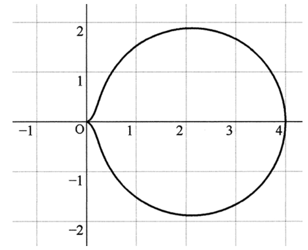
$m=\dfrac{1}{4}$，1，2，3 などとおき，関数グラフソフトGRAPESを用いてその図を描くと次の図のようになり，カージオイド（外サイクロイド）が連想できる。（図は $m=1$ の場合）



$n=-1$ として，

$-(X^2+Y^2)^2+4mX(X^2+Y^2)-Y^2=0$

$m=\dfrac{1}{4}$，1，2，3 などとおき，GRAPESを用いて描くと次の図のようになる。（図は $m=1$ の場合）



以上，直線，円，2次曲線を題材として，複素数平面における「鏡映の反転」や $w=z^2$ の変換について述べてきました。数学Ⅱ「図形と方程式」の軌跡や数学Ⅲ「極座標」の極方程式の考え方を加え，併せて，複素数平面に直交座標や極座標を重ね，どの座標系を使うと変換後の図形が見えやすいかも考慮しました。ただ，式変形の際，同値関係の検証が複素数であるが故に必ずしも十分ではないところもあります。

また，変換後の図形はどのようなものか，手作業で調べることが無理なものについては，関数グラフソフトを用いながら可視化を図りました。

複素数平面や「数学活用」「課題研究」の指導の際に参考になれば幸いです。

授業のワンポイントレッスン（その2）（複素数の 4 つの顔）

Focus Gold・Focus Up
編集委員
竹内 英人
Hideto Takeuchi

複素数を指導する際に，一番気を使うのが「どの形で扱うか」ということだと思います。
つまり
（ア）　$z=x+yi$　（x，y は実数）
（イ）　z のまま
（ウ）　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　（極形式）
（エ）　z を複素数平面上の点として（座標，位置ベクトルを表す点として）

それぞれに良さ（長所）は有るのですが，見極めを誤ると，とんでもなく手間がかかってしまうことも少なくありません。かと言って，問題のパターンごとに「この問は $z=x+yi$ を使って解く」などと決めつけてしまうのは，生徒の柔軟な発想を妨げてしまう可能性もあります。最善な方法を押さえつつも，（ア）～（エ）の様々な視点で見直すことが，「複素数の指導のカギ」となると思います。
今回は，そのような視点から，いくつかの問題を取り上げてみたいと思います。

> [Focus GoldⅢ　例題39]
> z が虚数で，$z+\frac{1}{z}$ が実数のとき，絶対値 $|z|$ の値を求めよ。

この問題はFocus Gold通信vol.5の豊田先生の記事に取り上げられている問題です。豊田先生の記事では4つの解法が載っています。今回は，この問題の復習から入りましょう。豊田先生の記事にもあるように，(ア)，(イ)の方法で解くのがオーソドックスな解法ですが，(ウ)と(エ)を組み合わせることによって，図形的な意味付けが明確になります（豊田先生の解法で言えば，3つ目の考え方と4つ目の考え方の合体バージョン）。

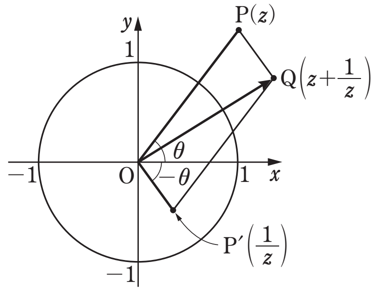
（解）　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$
（z は虚数より $r>0$，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。）

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}$$
$$=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$$
$$=\frac{1}{r}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$$

$$\begin{cases}\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}\\ \arg\left(\dfrac{1}{z}\right)=-\arg z\end{cases}$$

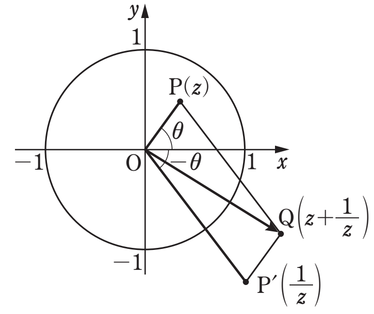
より，$\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{P}'\left(\frac{1}{z}\right)$ として複素数平面に図示すると，$\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\text{ の図を描く}\right)$

（ア）　$r>1$ のとき
$\mathrm{Q}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}'}$ であり，Q は次の図の位置となる。



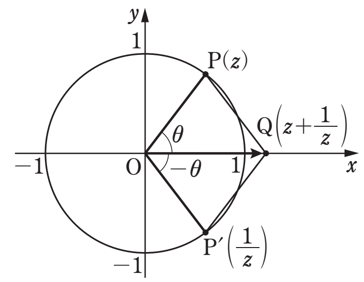
よって，$z+\frac{1}{z}\fallingdotseq$（実数）

（イ）　$0<r<1$ のとき
同様に考えると Q は次の図の位置となる。



よって，$z+\frac{1}{z}\fallingdotseq$（実数）

（ウ）　$r=1$ のとき
同様に考えると，Q は次の図の位置となる。



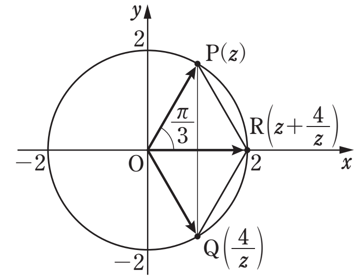
よって，$z+\frac{1}{z}=$（実数）
以上より，$|z|=r=1$

この発想を用いて，次の問題も考えてみましょう。

> [Focus GoldⅢ　例題55(1)]
> $z+\frac{4}{z}=2$ のとき　z を極形式で表せ。

（解）　$|z|=r$ とする。
$$\arg\frac{4}{z}=-\arg z$$
よって，$z+\frac{4}{z}=2$（実数）となるには，
$\left|\frac{4}{z}\right|=|z|$　すなわち $\frac{4}{r}=r$ でなくてはならない。

$r^2=4$ で，$r>0$ より，$r=2$
このとき，$\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{Q}\left(\frac{4}{z}\right)$，$\mathrm{R}\left(z+\frac{4}{z}\right)$ とすると（$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$），P，Q，R は次の図の位置となる。



よって，$z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
図で P，Q を入れ換えても同様より，
$z=2\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}$　（復号同順）

もう一題考えてみましょう。

> [Focus GoldⅢ　例題83]
> 複素数 z が不等式　$2\leqq z+\frac{4}{z}\leqq 5$　を満たすとき，複素数平面上での点 z の存在範囲を図示せよ。

この問題に関しても，Focusの解答では，（ア）と（イ）の方法を用いた解が載せてあります。しかし，この問題でも，前2題と同じ発想ですっきり解けます。

（解）　条件より，$z+\frac{4}{z}$ は実数である。
（ア）　z が実数のとき明らかに $z>0$ より，辺々に z をかけて，$2z\leqq z^2+4\leqq 5z$

$$\iff\begin{cases}z^2-2z+4\geqq 0\\ z^2-5z+4\leqq 0\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}(z-1)^2+3\geqq 0 & \cdots\cdots①\\ (z-1)(z-4)\leqq 0 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

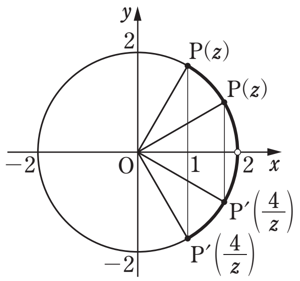
①はすべての実数 z で成り立つので，
②より，$1\leqq z\leqq 4$

(イ)　z が虚数のとき

$z+\frac{4}{z}=$(実数) と $\arg z=-\arg\frac{4}{z}$ より，

$|z|=\left|\frac{4}{z}\right|$　であるから，$|z|=2$

よって，P(z) は中心O，半径 2 の円周上にある。P$'\left(\frac{4}{z}\right)$ とすると，$2\leqq z+\frac{4}{z}\leqq 5$ となるのは，P，P′ が下の図の太線分にあるとき((2，0) 除く)。



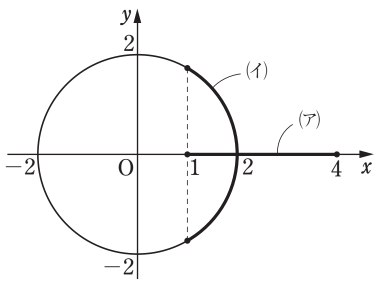
$\arg z=\theta$ とおくと，$0<\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ のとき

$\frac{4}{z}=\bar{z}$ となっており，このとき，

$2\leqq z+\frac{4}{z}<4$ が成り立つ。

$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき　　$\theta=0$ のとき

以上(ア)，(イ)より，z の存在範囲は，下の図の太線部分となる。



最後にしめくくりの1題をやりましょう。

> [Focus Gold Ⅲ　例題49(2)]
> 複素数 α，β について，$|\alpha|=1$，$|\beta|=4$，
> $\arg\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\pi}{3}$ のとき，$\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta$ の値を求めよ。

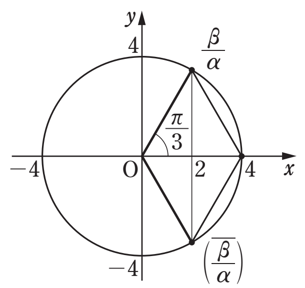
(解)　$|\alpha|=1$ より　$\alpha\bar{\alpha}=1$

よって，$\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta=\frac{1}{\alpha}\bar{\beta}+\frac{1}{\bar{\alpha}}\beta$

$=\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$

ここで，$\begin{cases}\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|=\frac{|\beta|}{|\alpha|}=4\\ \arg\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\pi}{3}\end{cases}$　より，$\frac{\beta}{\alpha}$，$\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}$

は次の図の位置となる。



図より，$\frac{\beta}{\alpha}+\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}=4$

以上，4題取り上げました。いずれも，生徒に教えるに当たっては，一番の標準的な解法かどうかはわかりませんが，大切なことは，教える側が「この解法がベストだ」という解法パターンを覚えさせるのではなく，色々な方法を考えさせた上で，「考え方は3つあるけど，この問題ではこの方法がスッキリしてるね。」という考え方の幅を見せることです。

「複素数平面」という単元は意外と題材が限られ，「解法パターン」を暗記するという学習に陥りやすい単元です。しかし，先に挙げたように，z の扱い方は(ア)～(エ)の4つの顔があり，別解も多々考えることができます。FGⅢでは，例題においても，こうした別解を数多く取り挙げました。また，チャレンジ編などは，一つの問題を様々な視点で取り挙げています（p676　チャレンジ問題5（東京大），p687　チャレンジ問題8（青山学院大））。ぜひ，先生方におかれましても，日々の授業の中で，柔軟な思考で指導いただければと思います。

生徒の素朴な疑問に答えるために④
―私の数学質問ノートから―

【岐阜県】佐々木学園 鶯谷中学・高等学校
校長　小邑 政明

Q　平面における直線の方程式は，$y-y_0=m(x-x_0)$ と $ax+by+c=0$ の2種類の表し方があるのはなぜですか。どちらか一方だけでよいと思うのですが。

解説

$y-y_0=m(x-x_0)$ は，$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{m}$　……①

と変形できる。

一方，$ax+by+c=0$ の方は，この直線上の1点を $(x_0,\ y_0)$ とすると，$ax_0+by_0+c=0$ より，差をとって，$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$　……②

と変形できる。

これは，$(a,\ b)\perp(x-x_0,\ y-y_0)$ を表している。

①における $(1,\ m)$ は直線の方向を，②における $(a,\ b)$ は直線と垂直なベクトルを表している。

それぞれ，方向ベクトル，法線ベクトルという。

さて，平面から空間に話を移す。

①の考え方は，$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$

となり，直線の式に発展する。

②の考え方は，$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

となり，平面の式に発展する。

平面における直線を表す2種類の表現は，空間における直線と平面に発展していく要素をそれぞれ含んでいることがわかった。

なお，平面における点 $(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax+by+c=0$ との距離を求める公式

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

は，空間における点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ と平面 $ax+by+cz+d=0$ との距離を求める公式

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

に自然に発展する。

大学入試問題の「別解」を考えてみよう①

【岡山県】岡山県立岡山朝日高等学校
山川 宏史

Q

A，B の 2 人がいる。投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり，最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

（i） A がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば A に 1 点を与え，コインは A がそのまま持つ。裏が出れな，両者に点を与えず，A はコインを B に渡す。

（ii） B がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば B に 1 点を与え，コインは B がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，B はコインを A に渡す。

そして A，B のいずれかが 2 点を獲得した時点で，2 点を獲得した方の勝利とする。たとえば，コインが表，裏，表，表と出た場合，この時点で A は 1 点Bは 2 点を獲得しているので B の勝利となる。

(1) A，B あわせてちょうど n 回コインと投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} p(n)$ を求めよ。 （2013　東京大学理科第3問）

解説

まず，オーソドックスに解いた場合は次のようになる．

$\boxed{\text{よくある解答}}$ (1)(i) B の得点が 0 点のとき

n が奇数のときは適さないから，$n=2k$ （k は自然数）とおける。A が初めて表を出すのは奇数回目であるから，1，3，……，$2k-1$ 回目のうち何回目であるかを選ぶと k 通りあるので，$p(n)=k\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}=\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{n}{2^{n+1}}$

$\underbrace{\times\cdots\times}_{\text{偶数個}}\bigcirc\underbrace{\times\cdots\times}_{\text{偶数個}}\bigcirc$

(ⅲ) B の得点が 1 点のとき

A が先に得点する場合も B が先に得点する場合も，n が偶数のときは適さないから，$n=2k+1$ （$k\geqq 2$）とおける。

・A が先に得点する場合

A も B も 1 回目の表は奇数回目に出るから，1，3，……，$2k-1$ 回目のうち何回目と何回目であるかを選ぶと ${}_k\mathrm{C}_2$ 通り。

$\underbrace{\times\cdots\times}_{\text{偶数個}}\bigcirc\underbrace{\times\cdots\times}_{\text{奇数個}}\bigcirc\underbrace{\times\cdots\times}_{\text{奇数個}}\bigcirc$

・B が先に得点する場合

A も B も 1 回目の表は偶数回目に出るから，2，4，……，$2k$ 回目のうち何回目と何回目であるかを選ぶと ${}_k\mathrm{C}_2$ 通り。

$\underbrace{\times\cdots\times}_{\text{奇数個}}\bigcirc\underbrace{\times\cdots\times}_{\text{奇数個}}\bigcirc\underbrace{\times\cdots\times}_{\text{偶数個}}\bigcirc$

よって，$p(n)=2\cdot{}_k\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}=2\cdot\frac{k(k-1)}{2!}\cdot\frac{1}{2^{2k+1}}=\frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}}$ （これは，$n=1$，3 のときも成り立つ。）

(i)，(ii)より，$p(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2^{n+1}} & (n\text{ が偶数のとき})\\[2mm] \dfrac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}} & (n\text{ が奇数のとき})\end{cases}$ ……答

(2) $S_n=\sum_{k=1}^{n} p(k)$ とおくと，

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}p(k)=\sum_{m=1}^{n}\frac{2m}{2^{2m+1}}+\sum_{m=1}^{n}\frac{(2m-1-1)(2m-1-3)}{2^{(2m-1)+2}}=\sum_{m=1}^{n}\frac{m}{2^{2m}}+\sum_{m=1}^{n}\frac{(m-1)(m-2)}{2^{2m-1}}$$

次に，$T_n=\sum_{m=1}^{n}\frac{m}{2^{2m}}$，$U_n=\sum_{m=1}^{n}\frac{(m-1)(m-2)}{2^{2m-1}}$ とおくと，

$$T_n-\frac{1}{4}T_n=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n-n\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}=\frac{\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{4}}-n\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

よって，$T_n=\frac{4}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}-\frac{4}{3}n\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\to\frac{4}{9}\quad(n\to\infty)$

また，$U_n-\frac{1}{4}U_n=2\left(\frac{1}{2}\right)^5+4\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots\cdots+2(n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}-(n-1)(n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$

$=\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{n-2}\frac{m}{2^{2m}}-(n-1)(n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$

よって，$U_n=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}T_{n-2}-\frac{4}{3}(n-1)(n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\to\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{27}\quad(n\to\infty)$

したがって，$S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}p(k)\to\frac{4}{9}+\frac{4}{27}=\frac{16}{27}\quad(n\to\infty)$

$S_{2n+1}=\sum_{k=1}^{2n}p(k)+n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\to\frac{16}{27}+0=\frac{16}{27}\quad(n\to\infty)$　以上から，$\sum_{n=1}^{\infty}p(n)=\frac{16}{27}$ ……答

この問題の類題として，2006 年度東京大学理科第 2 問（一部文理共通）があげられる（ただし，2013 年度に比べて易しい)。(1)はよくあるタイプの問題であるが，試験会場では場合分けが難しい。(2)も部分和の計算，Σk^2r^k の形の計算が要求され，煩雑であり，解答スペースも厳しい．そのため(2)について次のように別解を考えた。

$\boxed{\text{別解}}$ A が勝利する確率を求めることにほかならない。現在コインを持っている人が次に得点をする確率を p とする。コインを持つ人の勝ちを○，負けを×で表すと，現在コインを持っている人が次に得点をする場合は，○，××○，××××○，…… しかないので，

$p=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\cdots\cdots$　←列挙すると易しい。

これは，初項 $\frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数であるから収束して，$p=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$

（p の求値は，無限級数を使わなくても初戦の勝敗で場合分けして，$p=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-p)$ としてもよい。）

また，現在コインを持っていない人が次に得点をする確率は，余事象により，$1-p=\frac{1}{3}$

A が勝利するのは，得点する順番が，AA，ABA，BAA の場合だけで，これらは排反であるから，求める確率は

$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}+\frac{4}{27}=\frac{16}{27}$ ……答　（何と簡単！答えだけなら暗算レベル。）

注この解法は「バレーボールの旧ルール・サーブ権の有利性」である。なお，厳密には「収束する無限級数の和の順序を変更」しているので，解答の冒頭で「A が勝利する確率を求める」と宣言した。また，原題(1)があるため，理系の受験生の自由な発想ができない構成になっていると感じる。

真の数学力が身につく

Focus Gold（フォーカス・ゴールド） 新課程

A5判
3色刷

数学I+A, 数学II+B
数学II, 数学III

1. 『先に進める学習』と『基本も押さえる』に応えた「マスター編」
   フォローアップ（進める学習）とフィードバック（振り返り学習）で入試に必要な学力が確実に身につきます。
2. 充実したコラム
   数学への興味や知識の深まりなどが感じられる内容になっています。

入試に必要な「数学の本質」が確実に身につく

システム数学　2015年入試必修問題集シリーズ

- 河合塾の徹底した入試分析で良質の問題を厳選
- 難関国公私立大学の入試に対応した『実戦』と国公私立大学の入試に対応した『練磨』の2シリーズ発刊
- 入試に必要な重要問題で構成したテーマ別問題と，最近の傾向で学習できる総合演習問題の2部構成

実　戦	数学I·II·A·B	A5判	192頁／定価本体600円＋税 【解答（別冊）】A5判／276頁／定価本体476円＋税
実　戦	数学III	A5判	116頁／定価本体467円＋税 【解答（別冊）】A5判／180頁／定価本体495円＋税
練　磨	数学I·II·A·B	A5判	152頁／定価本体571円＋税 【解答（別冊）】A5判／168頁／定価本体286円＋税
練　磨	数学III	A5判	96頁／定価本体381円＋税 【解答（別冊）】A5判／100頁／定価本体238円＋税

理数教育の未来へ
啓林館
http://www.shinko-keirin.co.jp/

〒543-0052　大阪市天王寺区大道4-3-25　TEL.06-6779-1531　FAX.06-6779-5011
〒113-0023　東京都文京区向丘2-3-10　TEL.03-3814-2151　FAX.03-3814-2159
〒003-0005　札幌市白石区東札幌5条2-6-1　TEL.011-842-8595　FAX.011-842-8594
〒461-0004　名古屋市東区葵1-4-34 双栄ビル2F　TEL.052-935-2585　FAX.052-936-4541
〒732-0052　広島市東区光町1-7-11 広島CDビル5F　TEL.082-261-7246　FAX.082-261-5400
〒810-0022　福岡市中央区薬院1-5-6 ハイヒルズビル5F　TEL.092-725-6677　FAX.092-725-6680

20140301