理数教育の未来へ
啓林館
http://www.shinko-keirin.co.jp/

〒543-0052　大阪市天王寺区大道4-3-25　TEL.06-6779-1531　FAX.06-6779-5011
〒113-0023　東京都文京区向丘2-3-10　TEL.03-3814-2151　FAX.03-3814-2159
〒003-0005　札幌市白石区東札幌5条2-6-1　TEL.011-842-8595　FAX.011-842-8594
〒461-0004　名古屋市東区葵1-4-34 双栄ビル2F　TEL.052-935-2585　FAX.052-936-4541
〒732-0052　広島市東区光町1-7-11 広島CDビル5F　TEL.082-261-7246　FAX.082-261-5400
〒810-0022　福岡市中央区薬院1-5-6 ハイヒルズビル5F　TEL.092-725-6677　FAX.092-725-6680

20120901

啓林館 高校数学 教育情報誌

啓林館

Focus Gold（フォーカスゴールド）通信

vol.3

「整数について」

Focus Gold・Focus Up
編集委員
竹内 英人
Hideto Takeuchi

今回の新学習指導要領において，数学Aに新しく「整数の性質」が入ってきました。多くの先生方は，「従来より，東大，京大，阪大，一橋大といった難関大学を中心に，整数問題は出題されていたが，今回改めて指導要領の中に整数が位置づけられたことによって，入試にどのような影響があるのか?」という疑問をお持ちのことと思います。そこで，私自身が予想する今後の入試の展望並びに，日々の授業でどのような指導が考えられるかを，具体的な題材例を挙げて考えてみたいと思います。

私の勤めている大学にも数学科があるのですが，知り合いの数学科の先生に，「今年から，新しく「整数の性質」が入ってくるんですがどうですか?」と伺ったところ，「数学科の教員としては嬉しい。今までは，整数問題を出すことに少し躊躇していたし，出すにしても，本当に典型的な問題しか出せなかった。これで整数に関するいろんな問題が出せるから，数学科の先生はみんなうれしいんじゃないかな。」と仰っていました。私自信，この言葉の中に，新課程入試における「整数」の扱いの大きなヒントがあるのではないかと考えました。それを簡単にまとめると，

(i) 出題しやすくなった→2次試験，私大での出題は間違いなく増えるであろう。
(ii) いろんな問題が出せる→従来の典型的な問題だけではなく，他分野との融合問題など，バラエティに富んだ出題が考えられる。
(iii) 数学科の先生が嬉しいんじゃないかな→難関大学を中心に整数の性質の本格的な問題の出題が予想される。

以上を踏まえると，今後，学校現場で必要となる指導は，数学Aの授業を中心に従来の整数における典型的な問題（フォーカスゴールド数学Ⅰ+Aでは，p.465に大きく5つの分類，①約数，倍数に注目する問題，②整数解を求める問題，③大小関係をもとに文字の範囲を絞る問題，④剰余類による分類に注目する問題，⑤その他の特別なテーマに関する問題　と分けています）をしっかりと押さえつつも，単に整数の分野に止まらず，他分野との関連（とくに，整数の大事な性質「離散性」における，数列，確率との融合（たとえば，2011の東大の「数列と連分数」，2012の京大の「確率と連分数」など）に触れながら，さらには難関大学対策については，整数の様々な性質（整数論の基本定理を始めとして，フェルマーの小定理，連分数の理論など）まで，触れておく必要があるでしょう。ただし，実際のところ，普段の授業ではなかなか時間が取れないと思いますので，問題集や参考書でいろいろな問題を補充するのが一番でしょう。フォーカスゴールド数学Ⅰ+Aでは，従来の典型的な問題から，整数の性質に関わる本質的な問題，他分野にも関わる問題など，幅広く掲載しているので，標準レベルから難関レベルまで幅広く学ぶことができます。また，少し難しい問題や問題の背景にあるトピックに関しては，コラムで詳しく書かれているので，より深い学習ができると思います。とくに今回の編集でこだわったのは，過去の入試問題の良問を多く取り上げた点です。というのは，今後の新課程における整数問題の出題ベースは，過去の良問が1つのスタンダードになるかと思ったからです。実際，2011の名古屋大の4番（因数分解と整数問題）はかつての早稲田の類題，2012の京大の4番（最小多項式の問題）も数年前の大阪市立大の類題というように，近年，ますます過去問の類題が出題されるケースが増えてきました。フォーカスゴールド数学Ⅰ+Aにおいても例題230，262〜265，267などは，過去の多くの大学でくり返し出題された良問です。出題年度は古いものもありますが，本当に重要で，かつ，今後類題が出題されそうな問題を厳選してあります。これらの良問を繰り返し学習することが最適な学習方法となるでしょう。

最後に1つ，「整数問題の指導例」をあげたいと思います。2000年の大阪大学の問題（フォーカスゴールド数学Ⅰ+A：練習247）ですが，実験精神があれば小学生でも正解を得ることができる問題です。本問のねらいは，「実験」という，「数学的活動」の重要性を説きながらもいろんな角度でみることによって数学の面白さを実感させるところにあります。みなさんも，まず自分だったらどんな授業をするかを考えた後，読んでいただければと思います。

日々の授業も，単に正解を示して終わりというのではなく，教師と生徒が一緒になって，数学の世界を広げていく。そんな授業ができたらといいなと思っています。

【問題】
どのような負でない2つの整数 m と n を用いても $x=3m+5n$ とは表すことができない正の整数 x をすべて求めよ。（2000 大阪大）

（解1）
n にある値を入れて固定させた後，m に入れる数を変化させていくことにする。
$n=0$，$n=1$，$n=2$，$n=3$，… とやっていく。

(i) $n=0$ のとき $x=3m$ となる。ここで m の値を変化させていく。$m=0$，1，2，3，4，… とすると，$x=0$，3，6，9，12，15，18，…と変化していく。

(ii) $n=1$ のとき $x=3m+5$ となる。
同様に $m=0$，1，2，3，4，… とすると，$x=5$，8，11，14，17，20，23，… と変化していく。

(iii) $n=2$ のとき $x=3m+10$ となる。
やはり $m=0$，1，2，3，4，… とすると，$x=10$，13，16，19，22，25，… と変化していく

(iv) $n\geqq3$ のとき
$n=3$ とすると $x=3m+15$ であり，$m=0$，1，2，3，4，… とすると，
$x=15$，18，21，24，27，… となり，これは(i)$n=0$ の場合の x の値に含まれる。
$x=3m+15=3(m+5)$と変形できることからも理解できる。
$n=4$ のときの $x=3m+20$ でも，
$x=3(m+5)+5$ より，
$x=20$，23，26，29，32，…
これは(ii) $n=1$ のときの場合の x に含まれる。
$n=5$ のときの $x=3m+25$ でも，
$x=3(m+5)+10$ となり，
$x=25$，28，31，34，37，…
これは(iii) $n=2$ のときの場合の x に含まれる。
一般に $n\geqq3$ であれば，n を 3 で割った余りは 0，1，2 のいずれかである。$n=3a+b$（a は自然数，$b=0$，1，2）
とするならば

$$\begin{aligned}x&=3m+5n\\&=3m+5(3a+b)\\&=3m+15a+5b\\&=3(m+5a)+5b\end{aligned}$$

となり，$b=0$，1，2 であるので，
$x=3\times$(自然数)+(0 または 5 または 10)
となり，(i)，(ii)，(iii)のいずれかに含まれる。
以上より，(i)，(ii)，(iii)のみを考えればよいことがわかった。(i)，(ii)，(iii)の場合の x を工夫して書き並べれば以下の通りである。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	…
(i)	0			3			6			9			12			15	…
(ii)						5			8			11			14		…
(iii)											10			13			…

$x≧8$ では(ii)，(i)，(iii)の 3 つの行において，それぞれが 3 個おきに x の値を定めていくので，$x=3m+5n$ となる $(m,\ n)$ が存在する。
よって，$x≦7$ の範囲で $x=3m+5n$ と表せない数をすべて挙げれば，

$x=1,\ 2,\ 4,\ 7$

(解2) 今度は m を固定して，n を動かしていく。

(i) $m=0$ のとき $x=5n$ となり，n の値を変化させていき，

$x=0,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ \cdots$

(ii) $m=1$ のとき $x=5n+3$ となり，n の値を変化させていき，

$x=3,\ 8,\ 13,\ 18,\ 23,\ 28,\ \cdots$

(iii) $m=2$ のとき $x=5n+6$ となり，n の値を変化させていき，

$x=6,\ 11,\ 16,\ 21,\ 26,\ 31,\ \cdots$

(iv) $m=3$ のとき $x=5n+9$ となり，n の値を変化させていき，

$x=9,\ 14,\ 19,\ 24,\ 29,\ 34,\ \cdots$

(v) $m=4$ のとき $x=5n+12$ となり，n の値を変化させていき，

$x=12,\ 17,\ 22,\ 27,\ 32,\ 37,\ \cdots$

(vi) $m≧5$ のときは (解1) と同様に(i)〜(v)のいずれかの場合の x に含まれる。

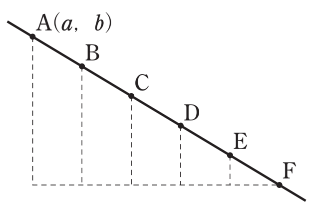
(i)〜(v)で考えればよく，10 以上のすべての数で 1 の位が 0，5 のものは(i)に，1 の位が 1，6 のものは(iii)に，1 の位が 2，7 のものは(v)に，1 の位が 3，8 のものは(ii)に，1 の位が 4，9 のものは(iv)に含まれていることがわかる。
よって，9 以下の自然数で(i)〜(v)に挙がっていないものを調べて，

$x=1,\ 2,\ 4,\ 7$

注 (解1) と (解2) を比べると，$3m+5n$ において係数の数が小さい m を固定すると 5 通りの場合分けになり，係数の数が大きい n を固定すると 3 通りの場合分けになることがわかる。$x=37m+3n$ などと問題の設定が変わったときに n を固定してしまうと，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 36$ と調べなければならない。
その点では (解2) よりも (解1) のほうが優れているといえる。しかし，(解2) にも利点はある。われわれは数を 10 進法で表記しているので，すべての自然数はその 1 の位を見るだけで，5 で割ったときの余りを判別することができる。(解1) のように表をつくることもなく処理することができる。

(解3) グラフを用いて考える。グラフを使いやすいように，問題の設定を次のように改めて考察する。すなわち，『どのような負でない 2 つの整数 x と y を用いても $k=3x+5y$ とは表すことができない正の整数 k をすべて求める。』とする。このとき，xy 平面において，

$3x+5y=k$ は直線を表し，$y=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{1}{5}k$ と変形すれば，傾きが $-\dfrac{3}{5}$ である直線上の格子点(x 座標，y 座標がともに整数である点) を考えていくことになる。



直線上のある点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ が格子点であるとする。この直線上にある別の格子点を調べることにする。

格子点 (x 座標，y 座標がともに整数である点) であるためには，まず x 座標が整数であることが必要である。
よって，x 座標が

$a+1,\ a+2,\ a+3,\ a+4,\ a+5$

である点を B，C，D，E，F とする。
このとき，各点の y 座標は $\mathrm{A}(a,\ b)$ の y 座標よりも $\dfrac{3}{5}$ ずつ小さくなっていく $\left(傾きが -\dfrac{3}{5} であるので\right)$。
したがって，

$\mathrm{B}\left(a+1,\ b-\dfrac{3}{5}\right)$

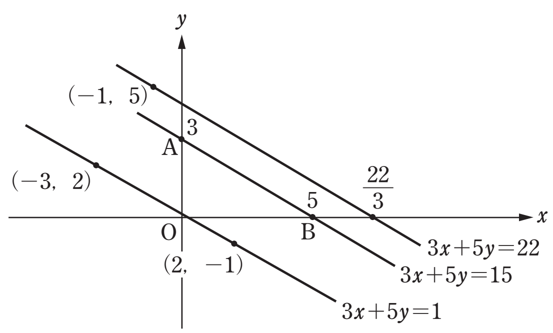
$\mathrm{C}\left(a+2,\ b-\dfrac{6}{5}\right)$

$\mathrm{D}\left(a+3,\ b-\dfrac{9}{5}\right)$

$\mathrm{E}\left(a+4,\ b-\dfrac{12}{5}\right)$

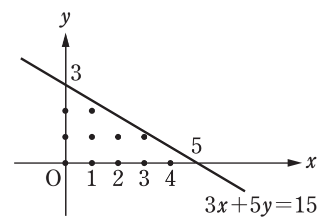
$\mathrm{F}(a+5,\ b-3)$

となり，格子点は F のみということになる。
この考察より，ある 1 つの格子点が直線 $y=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{1}{5}k$ 上にあれば，x 座標が 5 ずつ増えていった点は，すべて格子点ということになる。



$3x+5y=k$ のグラフを考える (図は $k=1,\ 15,\ 22$ の場合)。
$3x+5y=1$ 上の点 $(-3,\ 2)$ のように，第 2 象限に格子点があるとする。この直線上の次の右下にある格子点は，x 座標を 5 増やし，y 座標を 3 減らした $(2,\ -1)$ である。

よって，直線 $3x+5y=1$ は第 1 象限を通過するものの，格子点は第 1 象限をとび越えてしまう。
直線 $3x+5y=15$ は，$\mathrm{A}(0,\ 3)$，$\mathrm{B}(5,\ 0)$ を通り，A と B の x 座標の差はちょうど 5 である。
直線 $3x+5y=22$ のように直線 AB の上方にある直線を考える。このとき，直線上の格子点 $(-1,5)$ が存在する。
また，直線の y 切片である $\left(0,\ \dfrac{22}{5}\right)$ から x 切片である $\left(\dfrac{22}{3},\ 0\right)$ までの x 座標の差は $\dfrac{22}{3}$ と 5 より大きい。
よって，$(-1,\ 5)$ から，x 座標を 5 増やし，y 座標を 3 減らした次の格子点は，必ず第 1 象限にある (とび越して第 4 象限にいくことはない)。実際に求めるとその格子点は $(4,\ 2)$ である。
以上の考察から，$3x+5y=k$ (ただし $k≧15$) の上に必ず格子点があることが証明されれば，(証明は下の【注1】参照) 必ず $x≧0,\ y≧0$ の範囲に格子点をもつことが示される。その上で，
$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 14$ について調べれば十分である。

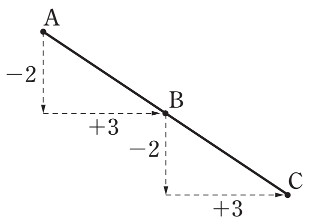


$(x,\ y)=(0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (0,\ 2),$
$(1,\ 0),\ (1,\ 1),\ (1,\ 2),$
$(2,\ 0),\ (2,\ 1),\ (3,\ 0),$
$(3,\ 1),\ (4,\ 0)$

について，$3x+5y=k$ を調べればよい。
このとき，
$k=0,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14$ となるので，$k=1,\ 2,\ 4,\ 7$ となることはない。
$x,\ y,\ k$ を問題文の $m,\ n,\ x$ に直せば，
求める x は，$x=1,\ 2,\ 4,\ 7$

【注1】$3x+5y=1$ 上に，$(2,\ -1)$ があるので，それを，k 倍して，$(2k,\ -k)$ とすれば良い。この問題では，$k \geqq 15$ の場合を考えているが，この考え方によれば，実際は，$k \geqq 15$ でなくても，$3x+5y=k$ 上には必ず格子点がある。）

【注2】問題の設定が $x=4m+6n$ だったらどうなるだろうか。（解3）の解法によると直線 $4x+6y=k$ を考えることになる。



直線の傾きは $-\dfrac{4}{6}$ であるが，約分すると $-\dfrac{2}{3}$ となる。

このように $ax+by=k$ において，a と b が互いに素であるかどうかで，格子点の間隔が変わってくる。（この話の本質的な部分は，フォーカスゴールド数学Ⅰ+A p.436のコラム「整数論の基本定理」を参照）

そこで，0 以上の整数 x，y に対して

$$2(2x+3y)=k \iff 2x+3y=\frac{k}{2}$$

と変形すると，$\dfrac{k}{2}$ が 6 以上の整数ならば，直線は必ず $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の範囲に格子点をもつことがわかる。よって，k が 12 以上の偶数ならば，必ず $4x+6y=k$ $(x \geqq 0,\ y \geqq 0)$ となる整数 x，y が存在することになる。もちろん，k が 13 などと，12 以上でも奇数ならば

$$4x+6y=13\ (x \geqq 0,\ y \geqq 0)$$

となる整数 x，y は存在しない。

（左辺）＝（偶数），（右辺）＝（奇数）だからである。

「Focus Gold」と新科目「数学活用」との連携を考える

Focus Gold・Focus Up 編集委員
豊田 敏盟
Toshiaki Toyoda

数学的な見方・考え方を養うとの観点から，次のFocus Gold Ⅰ+A p.162例題88の解法を検討してみましょう。

> 実数 x，y について，
> $x^2-2xy+2y^2-4x+2y+8$ の最小値と，そのときの x，y の値を求めよ。

この例題は，x の 2 次関数の最小値を求める問題を，2 変数 x，y の 2 次式に発展させたものです。一般に，生徒は「最小値の最小値が最も小さい値である」との考えで取り組みますが，次の解答例のように，2次方程式の判別式の利用もあります。

【解答例】$z=x^2-2xy+2y^2-4x+2y+8$ と置く。

$x^2-2(y+2)x+2y^2+2y+8-z=0$ …①

とすると，①は実数 x の 2 次方程式，y，z が実数定数と見ることができる。

よって，①の判別式を D_1 とすると，

$$\frac{D_1}{4}=(y+2)^2-(2y^2+2y+8-z) \geqq 0$$

つまり，$y^2-2y+4-z \leqq 0$ …②

2 次不等式 ② を満たす実数 y が存在するためには，$y^2-2y+4-z=0$ の判別式を D_2 とすると，

$$\frac{D_2}{4}=1^2-(4-z) \geqq 0$$

よって，$z \geqq 3$

したがって，z の最小値は 3

このとき，②は $(y-1)^2 \leqq 0$ で，y は実数より，$y=1$

$y=1$，$z=3$ を①に代入して，$x=3$

ところで，

関数 $z=f(x,\ y)=x^2-2xy+2y^2-4x+2y+8$ のグラフは，座標空間においてどのような図形になるでしょう。

1 関数 $z=x^2-2xy+2y^2-4x+2y+8$ が表す図形を調べる

関数 $z=f(x,\ y)$ において，$y=0$ とすると，

$z=x^2-4x+8$

これは $z=f(x,\ y)$ のグラフと平面 $y=0$（xz 平面）との交線です。

同様に，$y=1$ とすると，$z=x^2-6x+12$

$y=2$ とすると，$z=x^2-8x+20$

$y=a$ とすると，

$z=x^2-2(a+2)x+2a^2+2a+8$

これらは順に，平面 $y=1$，平面 $y=2$，平面 $y=a$ との交線です。

つまり，$z=f(x,\ y)$ のグラフを，y 軸に垂直な平面で切ると，切り口がつねに $z=x^2$ と同形の放物線であることがわかります。

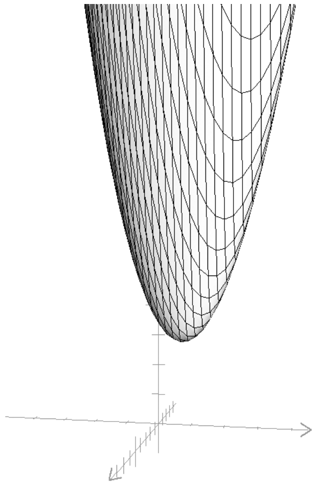
同様に，$x=b$ とすると，

$z=2y^2-2(b-1)y+b^2-4b+8$

となり，$z=f(x,\ y)$ のグラフを，x 軸に垂直な平面で切ると，切り口が常に $z=2y^2$ と同形の放物線であることがわかります。

以上から，座標空間における $z=f(x,\ y)$ は，大きな布を四隅を持って垂らしたような図形で，その窪みの底が 関数 $z=f(x,\ y)$ が最小となる所です。

それでは，その窪みの底の座標はどのようにして求められるかを考えましょう。



2　偏微分の考えで最小値を求める

曲面 $z=f(x,\ y)$ と平面 $y=a$ との交線

$z=x^2-2(a+2)x+2a^2+2a+8$　…①

を x について微分すると，$z'=2x-2(a+2)$
となり，①の2次関数は，

$z'=2x-2(a+2)=0$　…②

を満たす x で最小となります。
同様に，曲面 $z=f(x,\ y)$ と平面 $x=b$ との交線

$z=2y^2-2(b-1)y+b^2-4b+8$　…③

を y について微分すると，$z'=4y-2(b-1)$
となり，③の2次関数は

$z'=4y-2(b-1)=0$　…④

を満たす y で最小となります。
②と④を満たす x と b，y と a が一致したとすると，次の連立方程式ができます。

$2x-2(y+2)=0$　……②′
$4y-2(x-1)=0$　……④′

この連立方程式の解 $x=\alpha$，$y=\beta$ は，座標空間において関数 $z=f(x,\ y)$ がつくる図形の，x 軸に垂直な平面での切断面及び y 軸に垂直な平面での切断面の双方が最小となる x 座標，y 座標となります。
②′，③′ の連立方程式を解くと，$x=3$，$y=1$
したがって，関数 z の最小値は $z=f(3,1)=3$ です。
以上が，偏微分の考え方を利用した解説です。

偏微分の利用の問題例を1つの挙げます。この解説は次号で扱います。

容積が 32m^3 のふたのない直方体の箱を薄いプラスチックで作る。材料を最小にするには，どんな寸法にすればよいか。

「Vol.2 の問題の解説」
Vol.2 で最後に挙げた次の問題について解説します。

弟と兄がジャンケンを行い，弟が勝ったら階段を3段昇り，負けたら1段下る。兄が勝ったら2段昇り，負けたら1段下る。2人は同じ段から出発し，ジャンケンを繰り返しながら移動し，どちらかが最上段に着いたらゲームを終了する。 弟と兄のジャンケンの強さは同じ，各回とも勝負がつくまでジャンケンを行うとして，次の問いに答えよ。 (1)　ジャンケンを10回終えたところで，2人のいずれかが最上段に達してゲームが終了するとすれば，この段数は何段か。 (2)　出発後，兄弟が初めて同じ段に立つのは，ジャンケンを何回行い，その内，弟が何回勝ったときか。 (3)　ジャンケンを n 回 $(n\geqq 3)$ 行ったとき，弟と兄の階段の差が初めて8段になった。このとき，ジャンケンの回数 n と弟の勝った回数を求めよ。

(1)の略解（場合の数の考え方を活用）
弟の勝つ回数を x $(0\leqq x\leqq 10)$ とすると，弟の負け数は $(10-x)$ で，逆に，兄の勝ち数は $(10-x)$，負け数は x である。
よって，出発後，

弟は $3x-(10-x)=4x-10$ 段進み，
兄は $2(10-x)-x=20-3x$ 段進む。

次に，$z_{弟}=4x-10$，$z_{兄}=20-3x$ のグラフを，$0\leqq x\leqq 10$ の範囲で考えると，
弟が出発点から移動する階段数 $z_{弟}$ の範囲は
$-10\leqq z_{弟}\leqq 30$
兄が出発点から移動する階段数 $z_{兄}$ の範囲は
$-10\leqq z_{兄}\leqq 20$ となる。
よって，弟の移動する階段数の範囲を調べれば，兄の上り下りはその範囲に含まれる。
一方，$x=10$ のときの弟が上がる段数は30段であるから，出発点からの最上の階段数は28で十分勝敗が決まる。よって，$-10\leqq z_{弟}\leqq 28$，つまり，$28-(-10)=38$ 段が必要となる。

(2)の略解
ジャンケンを n 回行い，弟の勝つ回数を x とすると，弟は $3x-(n-x)=4x-n$ 段進み，

兄は $2(n-x)-x=2n-3x$ 段進む。

よって，$4x-n=2n-3x$ と置くと，$7x=3n$ となり，これを満たす最小の自然数 n，x は $n=7$，$x=3$ となる。
よって，ジャンケンを7回行い，弟が3回勝ったとき，2人は初めて同じ段に立つ。

(3)の略解（Focus Gold Ⅰ+A p.430例題244の解法）
弟と兄の階段の差は，
$|(4x-n)-(2n-3x)|=|7x-3n|=8$
(i)　$7x\geqq 3n$ なら $7x-3n=8$ となる。
$7x-3n=8$ の特殊解は $n=2$，$x=2$ より，
この式は，$7(x-2)=3(n-2)$
と変形できる。
7と3は互いに素，n，x は整数より，
$n-2=7k$，$x-2=3k$（k は整数）
$n\geqq 3$ である最小の自然数 n，x は，$k=1$ のときで，$n=9$，$x=5$
これは $7x>3n$ を満たす。
(ii)　$7x<3n$ なら $7x-3n=-8$ となる。
$7x-3n=-8$ の特殊解は $n=5$，$x=1$ より，
この式は，$7(x-1)=3(n-5)$
と変形できる。
7と3は互いに素，n，x は整数より，
$n-5=7k$，$x-1=3k$（k は整数），
$n\geqq 3$ である最小の自然数 n，x は，$k=0$ のときで，$n=5$，$x=1$
これは $7x<3n$ を満たす。
以上から，ジャンケンの回数は $n=9$ で弟は5勝，または，$n=5$ で弟は1勝ということになる。

授業
実践記録

「Focus Gold」の活用法を探求して

城北高等学校　白木 正康

1. はじめに

本校では，教科書以外の補助教材等は，各学年の教科担当者の裁量に任されています。従って，学年ごとに異なることも珍しくありません。従来は，問題集だけを与えて，後はプリントということがたいていの流れでした。しかし，最近の生徒は，なかなか整理できなく，プリントをよく無くしたりしてその提供に苦労しました。また，紙のゴミも多くなり，環境問題にもあまり好ましくありません。そんな経験から，まとまった書籍にした方がかえって安上がりであることと，生徒が保管しやすいという点からも，昨年から『Focus Gold数学Ⅰ+A』を利用する学年が出てきました。今年は，高校2年の希望者が『Focus Gold数学Ⅲ+C』まで使用しています。中学3年は,『Focus Gold数学Ⅰ+A』と『Focus Gold数学Ⅱ+B』を全員（270名余）が利用します。その活用方法をお話しします。また，それに対する生徒の反応やこれからのFocus Goldの利用法なども交えていきたいと思います。

2. 城北中高等学校について

城北中高等学校は，東京の板橋区にある中高一貫の男子校です。中学は7クラス，高校からは80名くらい募集して2クラスを新しく作り，中学からの7クラスと合わせて,高校では9クラスとなります。ほぼ100%が大学進学を目指します。国公立大では，東大・京大・一橋大・東工大を始め，国立の医学部を目指す生徒が年々増加しています。私立大では，早稲田大・慶応大を中心にほとんどの生徒が私立大を何校か受験しています。数学のカリキュラムは，文系コースでは，高校2年の夏頃までに数学Ⅱ+Bの教科書全範囲の講義を終了します。理系コースは，年度により多少の進行具合に差はありますが，だいたい高校3年の夏休み前で完全に講義を終了しています。指導計画上では，もう少し早めに終了したいのですが，年々遅れ気味になることも珍しくなくなりました。そのような傾向になる主な原因として，生徒の学力差が年々大きくなっているようです。さらに上位層が薄くなりがちで，中間層から下位層がますます増加しているように感じます。これは，どうも小学校からの『ゆとり教育』が少なからず影響しているようです。

3. 参考書購入の経緯について

従来は，各学年とも希望者に好きな参考書を購入してもらっていました。春・夏・冬の長期休暇での課題や，本校の入試期間の休暇中の宿題は，入試準備用の基本問題集や薄い復習の問題集を別途購入してやらせてきました。それ以外では，たくさんのプリントを印刷して配布していました。生徒のプリント管理がなかなか上手くできなくなり，たびたびの紛失により，対応する先生方も何枚かを常に保管しなければなりませんでした。枚数や使用回数が頻繁になればなる程に大変になってきました。日常の基礎から応用・発展，受験・研究まで幅広く，しかも長期間に渡り利用できるものをと考えて，今回の参考書『Focus Gold 数学Ⅰ+A』と『Focus Gold 数学Ⅱ+B』の採用を決めました。当然，値段もそう安くはない買い物ですが，存分に活用してボロボロになるまで使い切ればかえって価値あるものと考え，いろいろな活用方法を日々検討しています。そのいくつかを紹介したいと思います。

4. 日々の学習での利用

教科書・問題集の学習において，説明が不十分な問題や章末問題レベルの問題に対して，生徒が十分に対応出来ないこともたくさんあります。このような時こそ，Focus Goldで考え方，解法の研究，さらにより理解するために，重要な例題を指定して学習させます。さらに，定期テストの対策として，例題・練習の問題を指示してやらせます。場合によっては，**まとめノート**を作らせて，絶えず確認してもらうようにしています。最近流行の『東大ノート』作りのための準備にもなりますので，どんどん書いて，自分の言葉・レベルでまとめることのトレーニングをしてもらっています。本校では，特に，『チョロ見学習』（わからなければ，ちょっと見ては書いて，また見ては書くという，ことを繰り返しながら問題を解き，しかも最後には正解にして終わりにしてしまう方法）を，しないように注意しています。自力でどこまで解けるかを試してから，解答を見て答え合わせをして，出来ないときは，解答を丁寧に写して学び，**後日解き直し**をきちんとさせています。（しかしながら，なかなか出来ませんが…）

5.

『Focus Gold数学Ⅰ+A』と『Focus Gold数学Ⅱ+B』を辞書代わりに絶えず触れてもらうことを考え，式変形のコツやそのように糸口をとらえる理由などをきちんと学習してもらえるように，そのページの隅々までもしっかり読んでチェックさせています。まずは，自力で出来るところまでやってみます。次に，解説を見ながら自分の解法と照らし合わせて，不足・欠点などを見つけたりすることで，いろいろな考え方が身についてきます。同じような流れでも見る方向・考える方向を変えると違ったものが見えてきます。これこそが，思考力を養成する学習法といえます。このようにして学習すれば，問題を考える楽しみも沸いてくるはずです。時折，コラムの研究などをしてみるとよいでしょう。大切な考え方は，自分なりにまとめてみるのがよいのです。そして,何回も加筆・訂正を繰り返し，反復してまとめ，それを時々見返して見ることで，何回もまとめノートに接触することになります。この繰り返しこそが，確かな思考力・実力を自分のものにする学習法なのです。従って, Focus Goldの役に立つこと, 知らなかったことを，自分なりにノートにまとめさせています。高校3年の受験時期までには，5～6冊のすばらしいまとめノートが完成し，それを元にして受験をしています。

6. 2012年中学3年生の夏休みの課題

4月から7月上旬迄の一学期に下記の内容を学習しました。（教科書は，数研出版の数学Ⅰと数学A）

数学α：数と式・二次関数の最大・最小　迄
数学β：集合・場合の数・確率　迄

この内容に合わせて，夏期の課題として次のことを生徒にやってもらいました。

（実際のプリント）

【夏の課題】

Focus Gold I ・Aを利用します。

1. Focus Gold I ・Aの例題から，一学期の重要なところ，理解不十分なところから**セレクトした75～85問を学習**して，ノートにやって提出してください。**サンプル**をつけますので，一題一題を丁寧に解いて，まとめてもらうことにより，高校の学習のコツがつかめてくると思います。そうすれば，2学期の成績に大いに役立つでしょう。表を用意しますので，必ず添付して提出してください。

α・βで別々のノートにしてください。

α（必修30題；有志は，★例題から5問の35題全部）30～35題

β（必修39題，★例題から選択6問以上で45題以上；有志は，★例題を全問で50題）45～50題です。

中間の提出日を設けますので，各自チェックをしてください。

注意　進行チェックは，（α：10題以上；β：15題以上とします。）

2. **まとめノートの作成（選抜クラスと有志対象）**

作成表を元にしてノートをつくってください。例を参考にして，より優れた時間のかかったものを提出してください。

内容・質・丁寧・創意工夫など苦労して作ったものを提出してください。

2学期の成績に大きく反映します。

計画を立てて，全教科ともしっかりやってください。

ノートの作り方としての基本のスタイルとして，次のようにします。

見開き2ページ～4ページで例題1題をする。

◆自力で解答できた例題は，まとめ・注意・別解・練習・Step upなどをさらにやってみるとよい。さらに，大事な事柄や定理・公式は，まとめノートにまとめるとよい。

◆自力で解けなかった時は，解答を理解するために，解答を理解して写す。考え方・注意もチェックして，下の練習問題を必ずやってみる。さらに，後日，例題を自力で解いて確認してみる。

（これが理想であるが，なかなか出来ることではない。習慣づくまで，辛抱強く指導する。）

【ノートのレイアウト例として】

■見開き2頁または，4頁で，例題一題■

問題を書くかコピーしたものを貼る

チョロ見をしないで，自力で出来るところまで解いてみる

FGの解答・解説・考え方・注意などをまとめる。書き写してもよいが，後日自力で必ず解いてチェック。

練習などをする。

参考資料①　数学α；数学βの記入表

2012年度　　夏期休暇　数学学習課題：フォーカスゴールドI・A　　9月4日（火）　に提出

数学α　課題：FG I・A（セレクト例題：問題番号一覧表）

	例題10	例題11	例題12	例題13	例題14	例題15	例題16	例題17	例題21	例題22
良くできた（2点）										
出来ないが理解できた（1点）										
全然わからない（0点）										
完全学習日	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）

	例題23	例題24	例題25	例題26	例題27	例題32	例題33	例題34	例題68	例題69
良くできた（2点）										
出来ないが理解できた（1点）										
全然わからない（0点）										
完全学習日	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）

	例題72	例題74	例題75	例題76	例題77	例題80				
良くできた（2点）										
出来ないが理解できた（1点）										
全然わからない（0点）										
完全学習日	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）

	★例題35	★例題81	★例題82	★例題83	★例題84	★例題85	★例題86	★例題87	★例題88	
良くできた（2点）										
出来ないが理解できた（1点）										
全然わからない（0点）										
完全学習日	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）	月　日（　曜日）

ノートにきちんと解いて、答え合わせ・直しをしておいてください。

答えの丸写しは、将来の自分のために考えて行ってください。

M3　　組　　　番氏名

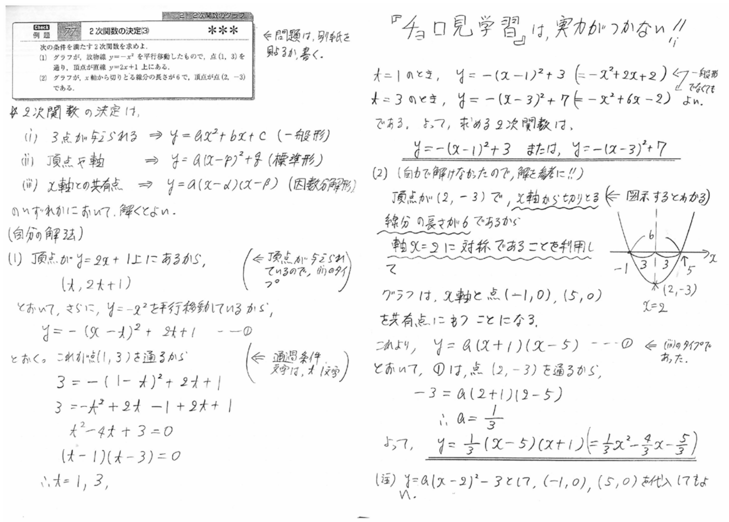
得	点
小　計	
小　計	
小　計	
合　計	

参考資料②　まとめノート作成の項目表

2012　　中3　夏期【数学】自由課題　テーマ

番号	教科書	F G	テーマ	内容
①	数 Ⅰ	P 40	$a^3+b^3+c^3-3abc$ の扱い方	準公式の作り方・利用法など
②	数 Ⅰ	P 49	開平法	√の開き方を研究する
③	数 A	P 101・102	3つの集合の要素の個数の求め方	要素の個数の求め方をまとめる
④	数 Ⅰ	P133～138	グラフの移動	平行移動・対称移動についての考え方をまとめる
⑤	数 Ⅰ	P143	放物線は、すべて相似形	相似の基本から考えて、コラムを参考にする。
⑥	数 A	P310・325	順列と組合せの関係	${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$ ${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1}$
⑦	数 A	P325	組合せの性質	${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$　${}_nC_r={}_nC_{n-r}$　ただし　$0\leqq r\leqq n$ ${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$　ただし　$1\leqq r\leqq n-1,\ n\geqq2$
⑧	数 A	P339～341	重複組合せ	Hの記号の使い方・考え方などをまとめます。
⑨	数 A	P356	同様に確からしい	具体例を用いて、その意味をまとめます。
⑩	数 A	P379	復元・非復元	コラムを参考にして、その意味の違いをまとめます。
⑪	数 A	P377・378	原因の確率	ベイズの定理なども調べて、わかりやすくまとめてみます。

参考資料③　実践見本ノート(サンプルとして)



7. 最近，特に注意している事

最近の生徒は，ノートを書くことが大変に苦手です。PCなどで作られた印刷物が多いため，手書きのものに触れる機会が目立って減りました。そのためか，書くことに抵抗を感じてなかなか書こうとはしません。そのため，**何回も手書きで書いたものをサンプルとして提供**しています。2～3ヶ月もするとようやく少しずつ変化が出てきます。また，図形・グラフを書くことが大変遅く，しかも苦手で不正確なものが目立ちます。PCでのデザイン・企画はよく出来る生徒も手書きでのアナログ的な制作・デザインは，大変に苦手で，苦労しています。従って，幾何の問題などは苦手であり，図を書いたり，証明したりは，時間ばかりがかかってしまいます。本来，幾何のような問題は，毎日少しずつ触れていくことが大切なのです。3Dが盛んに話題になっている昨今ですが，空間図形に対してはさらに苦手な生徒が多く，自分で書くことはもとより，知識も乏しく苦労しています。これは，小学校での実体験が乏しいことが原因ではないでしょうか。自分で作ってみたり，見たりすることが大変に少なくなってきています。さらに，新課程で単元として登場した『整数』も同様です。基礎がしっかりしてなくて，いきなり数学Aでの単元学習は，とても時間が足りません。(20時間余りの時間は，現状では，なかなかとれません。)しかも，中学受験をしていない生徒にとっては，基本が充分でないためになかなか習得できないのが現状でしょう。この分野は，今まで以上に，これからの生徒にとって，大切かつ必要不可欠な分野になり，さらに受験ではより欠かせない大切なテーマになるはずです。もっと，早くから，何回かに分けて，扱ってほしい内容でもあります。(小学校でもきちんとした単元で，扱って基礎を養ってもらいたいと思います)

8.『Focus Gold』についての生徒の反応と感想

①考え方，途中式の変形，答案の書き方など詳しく書かれていて，大変に見やすい。
②Focusでのポイントまとめ，注意などがよくまとまっている。
③別解がたくさん掲載されていて，面白く，しかもためになる。
④コラムがたくさん掲載されていてよい。
⑤一冊で，基礎からハイレベルな受験まで使えるので，少しずつ変化をさせてレベルアップ出来そうである。
⑥本書を活用しやすく，書き込み用の独自の『ノート』があるとさらによいと思う。
⑦公式集が付録でついてくるが，公式の証明・使い方辞典のようにしてもらえたらさらによいと思う。
⑧公式集に，定期テスト対策問題セレクトとして，Focus Goldの例題，練習問題などを指示してもらえたらとても活用しやすくなってよいと思われる。さらに，日々の講義でもっと活用できるように，教科書の学習に合わせた指南をしてもらえたらとてもよいと思う。

以上が，生徒から聞かれた感想・意見です。

9. 最後に

新課程になって，整数・データ分析・空間図形などが学習範囲に入り，その指導方法に先生方の興味があることと思います。今回の通信を読まれた先生方に，出来るだけ指導上の苦労話をしていただきたいと思います。私も，今後たくさんの実践例を報告していただけると指導の参考になると思います。是非ともよろしくお願いいたします。特に，『Focus Gold』を活用した実践例の報告を楽しみにしております。

白木 正康　しろき まさやす
長野県塩尻市生まれ。
学習院大学理学部数学科を卒業。代数学を専攻。城北中・高等学校に30年勤務。現在，環境美化指導部主任で，5Sの実施・ISO14001の取得を目指しています。趣味は，PC・カメラ・ロシアンブルー（猫）・サラブレット。

授業
実践記録

「太田高校数学科の授業実践」

県立太田高等学校　武藤 仁志

1. 本校の沿革と現状

本校は，明治30年に創立され，一世紀を超える歴史を持つ，群馬県内屈指の伝統を誇る男子普通校です。「文武両道・質実剛健」を校風とし，生徒・教師が一体となって，活力のある学校の創造に努めています。敷地内には，いなり山古墳（推定，6世紀）があり，環境に恵まれた緑豊かな学校です。そのいなり山を削り，まっすぐな校舎に改築しようとしたところ，関係者に事故が続発したため設計変更し，校舎は古墳を避けるため曲がっています。

本校は中高一貫校ではなく，一般的な地方の進学校ですから，新入生には高校数学を一から教えなければなりません。県内で人口規模も大きく入学者のレベルも高い前橋，高崎や他県のトップ公立高校に追い付き追い越せの気持ちで本校数学科は頑張っています。そんな中，平成24年度入試では東大3名，東工大4名，京大2名等，国公立大学合格者数153名（現役の延べ数）でした。都会の私立高校を中心に進学熱が上がり，難関大の合格が難しくなった中，決して満足はしていませんが健闘したと思います。部活動も活発で，本年度ではテニス団体，アーチェリー個人，陸上やり投げでインターハイ出場，ラグビーは29年ぶりに春の県総体で優勝し初の花園出場が大いに期待されています（7月現在）。

特筆すべき行事として栃木県立足利高等学校との「対抗戦」が挙げられます。地理的（隣接市）にも歴史的（新田氏と足利氏）にも関連が深い，男子進学校である両校の全生徒が様々な競技で競い合う「本戦」が2年に1回行われています。

2. 授業実践

特に変わり映えなく教科書を中心に進めているだけですが，本校の数学「授業」の取り組みについて，用語解説風に紹介したいと思います。教科書を進める時期において，予習からテストの復習までをひとつのローテーションと考えてみます。

「フォーカス」：4年前から参考書としてはフォーカスゴールドを生徒全員に持たせています。採用理由としては，「マスター編」では基本問題の解説もしっかりしており重要な問題を網羅していることです。「コラム」は生徒より教員のほうが気に入っているかもしれません。正直なところ「チャレンジ編」「実践編」は本校のレベルでは授業において十分活用できていません。しかし，少数の難関大志望者にとってはこの1冊だけで足りているようです。後述の「フォーカスセレクト」に向けてもちょうどいいレベルです。

「チェック表」：ノート提出を課す課題提出の際には，必ず解き始める冒頭部にチェック表を貼らせます。教科書の問でも傍用問題集でも問題毎に欄を作り，○自力でできた△何か見てできた×理解できなかった，を記入します。後で見返したときに△×を確認すればよい，授業を聞いて理解できたら赤で○にすればよいと指導しています。参考にする教科書ページや参考書問題番号を欄外に入れたりしています。提出チェックをする教員としてはどこから始めたかわかりやすく，チェック表を見ればどの程度取り組んだかだいたいわかり（ちゃんとページをめくって確認はします。やっていないのに○などとする輩は幸いいないようです），押印して不完全であれば再提出を指示します。

「数学科通信」：1つのテストが終わると必ず次のテストに向けて発行します。テストの期日，教科書・「準拠」のテスト範囲，課題の提出期日，「朝補習」の日時等について，課題の「チェック表」と一緒に配ります。

「先行予習」：教科書の予習は長期休業中の課題としています。1学期に進む3章分は春休み，2学期分は夏休み，3学期分は冬休みの課題です。分量が多い場合は学期前半分でよいとすることもあります。（「チェック表」あり。答は証明等を略した簡易なものを指示の時に配布する。）

「準拠」：傍用問題集は当然課題の中心となります。類題がテストに出されることを生徒はわかっているので一生懸命取り組みます。その日の授業に該当する問題を解く「その日準拠」を勧めています。期日までに提出した者にだけ解答をノートに挟んで渡します。その解答ですが，出版社が用意したものもありますが①提出範囲の問題だけ渡したい②実情にあった解答にしたい・別解を示したい，という理由により手書きで作り直し印刷しています。その解答をもらうためにも「準拠」の提出は生徒にとって重要になります。大部分の生徒にとって期日までに提出するのは厳しいですが（不完全でも出し直せば○にするということで解答は渡します），期日前に出す者もいます。「早出し準拠」といい，尊敬されるので上位者はそれを目指します。（「チェック表」あり。）

「まめテスト」：授業数の半分程度の回数を用意します。本校は65分授業を取り入れているため，授業始めに前時の復習としたり，授業途中の気分転換にしたりと取り組みやすい状況です。解答させ答を配り隣通しで交換して採点後回収という流れで10分程度かけます。問題レベルですが，①できないと困る基本問題②余裕がある者向け応用問題を用意し，①が満点でない者は①を解き直し③（①と同レベルの問題）も解いて再提出することにしています。本当に基本問題なのですが，再提出になるかどうかのプライドがあるようで，結果について和気あいあいに見せ合い，間違ったところの検討をしています。

「計算練習プリント」：Σの計算だけ10題，2項間の漸化式だけ10題等，範囲内でベースとなる基本パターン数種類だけを繰り返し解かせています。テスト間は2～3週間なので週末プリントとして2回程度課します。計算力の低下は本校では大きな問題で，これだけはという計算に自信を持ってもらいたいと思っています。提出の前日には解答を配り，自己採点して提出させます。

「フォーカスセレクト」：先にテストについての話になりますが，中間・期末テストは基礎・応用として2回あります。基礎は直前に取り組んだ教科書の範囲です。応用はさらに前の範囲で「一斉テスト」でやっているのでテスト範囲にするのは2回目になります。その学習対象は，応用だから指示しないでもよいのでしょうが，それで勉強できるレベルに本校の生徒がないのでフォーカスゴールドから20題程度セレクトします。全てそのまま出題するわけではないですが，関係した問題を出題するようにしています。「数学科通信」で番号だけ指示すれば済むところですが，紙に問題全文を印刷して配布します。切り取ってノートに貼ってから解かせるためです。少し前まではフォーカスをコピーしてガタガタに切り貼りしていましたが（全員買っているから許されるでしょう），今はワードで打ち込んだデータをもらえるのでパソコンソフトで配置を考えてプリントを作れます。（「チェック表」あり。）

「朝補習」：3年6月までは部活動優先で放課後の補習，課外はやりません。テスト数日前の朝だけは直前のテストの結果により下位者（2割程度）を指名して補習を行います。プリントを用意しての自学自習が基本です。希望者も参加可としてい

ますが，指名者と併せて学年の8割程度が参加します。遅刻しないで参加したものだけに問題・解答を渡しています。

「一斉テスト」：どこでもやっていることでしょうが学力・中間・期末テストの間の章末テストはこう呼んでいます。学年7クラスを2つに分けて大教室（視聴覚室）で行います。大教室は監督を少なくできるので助かります。

「やり直しプリント」：できなかった問題だけでよい，ということでテスト後に提出させます。ノートにではなく，穴埋め問題は記述問題に手直しした，テストと同じ問題のプリントを用意します。

3. その他の取り組み

以上のことは，学年や先生によりそれなりにアレンジされて実施されています。不振者への個別指導や上位者（希望者）へのプリント課題（添削）も行われています。

「課外授業」としては年間計画に入っているものとして「土曜課外」「長期休業中課外」があります。これらは生徒全員参加としています。

「土曜課外」は年10回程度実施しています。1，2年に対し英数国で本校教員が授業をします。年度当初は県総体，全国総体予選があり部活に集中させるため7月以降に入れています。

「長期休業中課外」としては夏休みに前期，中期（3年のみ），後期の各6日間，冬休みは12月中に4日間です。春休み中は昨年までありましたが24年度から取りやめました。

4. 終わりに

このような実践によりうまくいっているかというと十分な自信はありません。最初にこの春の入試結果は健闘したと書きましたが，毎年安定して難関大合格を出しているわけではありません。不登校・退学者も毎年何人か出ています。そのため昨年度から「太田高校新ビジョン（知的好奇心を喚起し，自立学習ができる生徒の育成）」を掲げ，授業や課題を見直し「課題学習から自主学習への転換」を目指して取り組んでいます。そんな中での報告ですので，年度途中に方針が変わってしまっているということもあるかもしれません。読んでいただいた方の参考に少しでもなれば幸いです。

武藤 仁志　むとう ひとし
群馬県立太田高等学校　教諭
群馬県生まれ。
東京学芸大学卒。教職28年目。太田高校は母校であり，勤務3年目。
趣味はゴルフ（の練習）。

生徒の素朴な疑問に答えるために③
―私の数学質問ノートから―

【岐阜県】佐々木学園 鶯谷中学・高等学校
副校長　小邑 政明

Q　3次以上の方程式について，解の公式や判別式はどのように求められますか。

解説

2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解の公式は，$x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$,

判別式は，$D_2=a^2-4b$ ですが，この場合，方程式の解を α，β とすると，$D_2=(\alpha-\beta)^2$ と表すことができる。

3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の解を α，β，γ とおくと，判別式 D_3 は

$$D_3=(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$$

で定義される。

解の公式は，$x+\dfrac{a}{3}$ を x と置きなおして，$x^3+px+q=0$ の形にして解くことで煩雑さを避けるのが一般的である。

この方程式の判別式を計算すると，$D_3=-4p^3-27q^2$ となる。

解の公式は，$A=\sqrt[3]{-\dfrac{27}{2}q+\dfrac{3}{2}\cdot\sqrt{-3}\cdot\sqrt{D_3}}$，$B=\sqrt[3]{\dfrac{27}{2}q-\dfrac{3}{2}\cdot\sqrt{-3}\cdot\sqrt{D_3}}$ として

$$\alpha=\frac{A+B}{3},\quad \beta=\frac{A\omega+B\omega^2}{3},\quad \gamma=\frac{A\omega^2+B\omega}{3}$$ （カルダノの公式）

ここで，$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ である。

4 次方程式の判別式は，解を α，β，γ，δ とすると，

$D_4=(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma)^2(\beta-\delta)^2(\gamma-\delta)^2$ を解と係数の関係を使って計算し，4 次方程式の係数で表せばよい。

4 次方程式の解の公式は，カルダノの弟子フェラリによって導かれた。

5 次以上の方程式については，一般的な解の公式が存在しないことがアーベルによって証明された。

現代では，2 次，3 次，4 次の方程式の伝統的な解法，および 5 次以上の方程式には一般的な解の公式が存在しないことが，解の「置換群」の構造と解がつくる「代数体」との美しい関係を表す「ガロア理論」で示されている。