

生徒の素朴な疑問に
答えるために②
—私の数学質問ノートから—

【岐阜県】佐々木学園 鷺谷中学・高等学校
副校長 小邑 政明

Q 数学Ⅲの教科書に $e = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}$ で定義された数は無理数であることが知られているとありますが、どのように証明するのですか。

解説

(1) 全ての自然数 n で、 $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n e^t dt$ が成り立つことを示す。

(証明)

(I) $n=1$ のとき、部分積分法を使って、

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{1}{1!} \int_0^x (x-t) e^t dt = 1 + x + \left[(x-t) e^t \right]_0^x - \int_0^x (-1) e^t dt \\ &= 1 + x - x + e^x - 1 = e^x = \text{左辺} \quad \text{なので成立する。} \end{aligned}$$

(II) $n=k$ のとき成立すると仮定する。

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{k!} \int_0^x (x-t)^k e^t dt \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで、} \int_0^x (x-t)^k e^t dt &= \left[-\frac{(x-t)^{k+1}}{k+1} e^t \right]_0^x - \int_0^x -\frac{(x-t)^{k+1}}{k+1} e^t dt \\ &= -\frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{k+1} \int_0^x (x-t)^{k+1} e^t dt \quad \text{より、} \textcircled{1} \text{へ代入して、} \end{aligned}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+1)!} \int_0^x (x-t)^{k+1} e^t dt \quad \text{が成立する。}$$

よって、 $n=k+1$ のとき成立することが示された。

数学的帰納法により、すべての自然数で成立する。

(証明終了)

(2) (1)を利用して、 e が無理数であることを示す。

(証明)

(1)で証明された式に $x=1$ を代入すると、

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

e が有理数であると仮定すると、 $e = \frac{l}{m}$ (l, m は自然数)とおくことができる。

②における n として、 e, m の両方より大きな自然数を考える。

②の両辺に $n!$ をかけると、

$$\frac{l}{m} \times n! = n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + 1 + \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$$

よって、 $\int_0^1 (1-t)^n e^t dt$ は整数である。 $\cdots \cdots \textcircled{3}$

$$\text{一方、} 0 < \int_0^1 (1-t)^n e^t dt < \int_0^1 (1-t)^n e dt = e \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{e}{n+1} < 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

③と④は矛盾する。従って、 e は無理数である。

(証明終了)

フォーカスゴールド Focus Gold 通信

p.2-7 [特集]

「数学活用」とは? 「数学活用」を活用する

横浜国立大学教授 根上 生也

「Focus Up」の活用法 p.8-9

Focus Gold・Focus Up 編集委員 竹内 英人

「Focus Gold」と新科目「数学活用」 との連携を考える p.10-11

Focus Gold・Focus Up 編集委員 豊田 敏盟

授業実践記録

p.12-15

◆「Focus Gold」の利用一例

早稲田高等学校 伊藤 潔

生徒の素朴な疑問に
答えるために —私の数学質問ノートから—
p.16 佐々木学園 鷺谷中学・高等学校 副校長 小邑 政明

vol.2

「数学活用」とは？ 「数学活用」を活用する

横浜国立大学大学院環境情報研究院教授 根上 生也

●数学活用とは何か

平成24年4月から施行された新学習指導要領の高校数学は、コアとなる「数学Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ」とオプションの「数学A、B」に、「数学活用」という新しい科目を加えた構成になっている。

この新科目「数学活用」とは何なのか。現行のカリキュラムにある「数学基礎」の発展形と捉える考え方もあるが、その設置の思惑はかなり異なっている。そもそも「数学基礎」は「数学Ⅰ」との選択必修だったので、高校は将来の受験勉強につながる「数学Ⅰ」とそうではない「数学基礎」の選択を迫られることになる。そのため、進学を目指すほとんどの学校では、「数学基礎」が選択されていない。しかし、一方で、「数学基礎」を学んだ高校生たちは「こんな数学なら、中学校のときからやってくればいいのに」という感想を持つそうだ。要するに、「数学基礎」には数学が好きになるという効果があったようだ。

一方、「数学活用」は「数学Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ」と「数学A、B」の流れとは独立に指導することができる。その指導内容は、学習指導要領の中では次のように定められている。

- (1) 数学と人間の活動
 - ア 数や図形と人間の活動
 - イ 遊びの中の数学
- (2) 社会生活における数理的な考察
 - ア 社会生活と数学
 - イ 数学的な表現の工夫
 - ウ データの分析

私の言葉でいえば、「数学活用」の目的は「数学が人とともにあることを知り、数学が世の中で役にたっていることを知る」である。

そして、その「人」の中には、数学を作り上げてきた過去の先人だけでなく、自分自身も含まれていることを自覚することである。

●SSHを目指す！

他の科目と異なり、「数学活用」の指導内容には三角関数や微積分のような具体的な数学的概念が挙げられていない。生徒自身の活動やコンピュータの利用を積極的に取り入れて指導することが期待されているので、例題の解法を示し、その定着を図るべく練習をさせるという従来の指導方法はなじまないかもしれない。要するに、いわゆる受験勉強的要素だけではなく、受験数学とともに、生徒たちが数学を学ぶことの意味を感じられるような指導も展開できるのではないかと。今回の「数学活用」はそういう発想のもとで生み出された。

これと似た発想のものにいわゆるSSH(スーパーサイエンスハイスクール)がある。そして、毎年夏には研究成果の発表会が行われる。プレゼン大会では審査員そっちのけで生徒どうしの質問が飛び交い、ポスターセッションでは自発的に客を呼び込み、熱心に説明をする。十分な予算を投資して環境を整え、きちんと指導をすると、高校生といえどもここまで理知的でエネルギーな状態になれるのかと驚かされる。

しかし、残念なことに数学をテーマにした研究が少ない。もちろん、SSH校に指定された高校の数学の先生たちも数学をテーマにした研究を指導したいとは思っているはずだが、「与えられた問題を解く」以外に、どうすれば「数学の研究」になるのかで悩むことも多いらしい。確かに理科ならば、子どもの頃から実験や観察を経験しているから、研究のようなスタイルで生徒を指導しやすいだろう。

ところが数学となると、博士課程まで進学しないと研究というスタイルで数学に接する経験はなかなかできない。こうした状況に活用していただきたいのが「数学活用」なのである。問題を解くというだけでは研究につながらない。「数学活用」のもとで展開される数学は従来の数学とは趣を異

にする。覚えた公式を使って決まった手順どおりに何かを計算すればよいような問題は現れない。パズルのような問題に潜む数理的な構造に着目して一般的な解法を議論したり、そもそも問題を解くのではなく、他にどんな類似の問題があるのかを本やインターネットで調べたり、さらには、日常の中にどんな数学が隠れているのかを探求したりする。

受験を意識した従来の数学だけでなく、「数学活用」を通して、新しい数学に取り組んでみてほしい。

たとえば、個々の生徒がそれぞれ問題を解くのではなくて、みんなで何かを調べるという方法もある。しかも、あまり一般的な課題を設定せずに、自校に密着したものにする。もし生徒たちにいわゆる「算額」について研究させようとするならば、「算額について調べる」ではなく、「地元の神社に奉納されている算額について調べる」とする。そうすれば、単に算額について書

かれた一般的な書物を読むだけでなく、地域の資料を手分けして探すという生徒たちの活動へと発展する。

著名な数学者の講演会を開くのもよいが、数学者にたよらず、「数学活用」の教科書の中から題材を探して、自校で独自に生徒の研究活動を設定してみてもどうだろうか。たとえば、離散数学や整数の問題、データの処理を伴う問題などは、生徒といっしょに取り組むのに適しているだろう。

●数学活用の学習を通して

最近、次のような大学生が多くなっている。

- ・自分のことを語ろうとしない。
- ・責任を負う立場に自分を置かない。
- ・勉強に目的を持っていない。

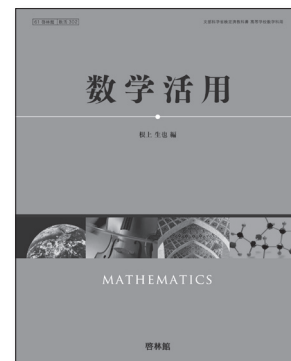
とくに1つ目と2つ目は高校数学の学習の仕方

と大きく関係しているように思えてならない。先生がやるべき課題をすべて用意してくれて、自分自身で勉強の仕方を考える必要がない。そういうことを繰り返しているうちに、大人が何でも考えて自分が困らないようにしてくれると思ってしまっているのではないかと。現にたくさんの大学生が「大丈夫でしょうか」を口癖にしている。用事があって私のところに来たのは学生の方なのに、具体的な要求を口にするでもなく、ただ「大丈夫でしょうか」と言う。私が学生の気持ちを察していろいろと気を回し、困らないように指示を出すことを期待しているのだ。

一方、すでに述べたようにSSHの研究発表会で目撃する高校生たちはこれとは正反対の行動をとる。自分たち自身のアイディアで展開した研究の成果を自分たち自身の言葉で語り、どんな質問にでも自信を持って対応する。もちろん、わからないこともあるが、それを素直に認め、思いの至らなかったことを反省し、質問者に感謝の言葉を返す。

すべてを自分自身の責任のもとで行動しようとする態度は、見ていてとてもすがすがしい。「数学活用」は生徒を快活にする数学を提供する。「数学活用」は生徒たちに数学を学ぶ目的を伝え、数学を自ら学ぼうとする態度を育成することには有効である。そういった科目になってもらいたいと思うと同時に、そういった科目にするために今回の教科書を執筆した。

「数学活用」を学んだ生徒たちは、数学を学ぶ目的や価値を知る。そんな生徒が一人でも多く育ってほしい。



「数学活用」は、いろいろな場面で活用いただけます。ここでは、各方面の先生方から見た「数学活用」について紹介します。

数学基礎から数学活用へ

日本評論社 佐藤 大器

私は、月刊誌『数学セミナー』（略称「数セミ」）に、編集長時代を含めて九年ほどかかわりました。現在では、自然科学系書籍の編集に携わっています。こうした経験を「数学活用」の教科書づくりに活かしてほしいといわれ、お役に立てればと思いました。

前回の指導要領改訂では、高校数学においては「数学基礎」の新設が特筆すべきことでした。飯高茂先生が「数学基礎」を「市民の数学」と位置づけられ、その視点は、とても新鮮でした。その影響で、私は「数学基礎」をうまく広めれば、数学ユーザーを増やし、数学ファンの裾野を広げることができると期待しました。数セミ誌上で「数学基礎」の教科書のプロトタイプを提示したいと考え、「高校『数学基礎』－一つの試案（芳沢光雄）」の連載を行ったのです。

その後、「数学基礎」については、いくつかの教科書は出たものの、多くの高校で採用されず、「市民の数学」の理念はうまく行き渡らなかったようです。大学入試との関係や単位の取り方など、理念以外での問題点も多くあったものの、市民に十分に届くまでにはいかなかったと反省しています。

今度は、「数学活用」が新たに登場しました。「数学基礎」が模様替えしたものと見る向きもあるかもしれませんが、まったく異なるものです。そこにある数学は、基礎でもなければ入門でもない、「活用される数学」です。その姿を様々な切り口で見せるのが、今回の「数学活用」の教科書の理想の姿と考えました。「活用される数学」のいくつかの場面を提示することだったら、専門家でないけれど、様々な数学の経験だけはある私のような編集者が貢献できることでした。

この啓林館の「数学活用」の教科書では、ほかの編集者と協力して、多くの「活用される数学」を提示できたと自負しています。あとは、肉付けをして、生徒に「数学活用」の世界に触れてもらうことです。そのサポートも行っていきます。

「数学活用」の活用への期待を込めて

浪川 幸彦

1. 数学教育改革の切り札

「数学嫌い」が「理科離れ」と共に問題とされ、「考える」ことをしないドリル型詰め込み教育の弊害が叫ばれて久しい。

これを解決する方法は、生徒達みずからが数学について考え、あるいは数学を使って課題を解き、数学の素晴らしさを知ることを描いて他にない。今回の学習指導要領改訂で、高校数学に課題学習が導入され、「数学活用」が設けられたのはこの趣旨に他ならない。改訂に携わった者の一人として、この趣旨が理解され、広く学校現場で「数学活用」が活用されてほしいと切に願う。

2. すべての生徒に数学の楽しさを

「数学活用」はまず第一に生徒が数学の楽しさを知る教科である。この教科書は著者自身が楽しんで書いている（らしい）。

現場の先生達にも、とにかくまず「数学活用」の教科書を手にとって眺めてほしい。いやしくも「数学好き」を標榜する者ならわくわくするに違いない話題がてんこ盛りで並んでいる。「数学Ⅰ」「数学A」で導入される課題学習に使えそうな面白いテーマも目白押しだ。

3. 文系生徒には数学の大切さや身近さを

今の生徒達は、数学は学校の中（と入試）にしかないと思っている。この教科書が「世界は数学でできている」から始まっているのは、これを意識したものだろう。現代社会では、放射能問題でも分かるように数学的知識が文系の人達にとっても欠かせない。「数学活用」は「学校数学」と市民的素養とを結び付ける場として今後重要になる。

4. 理系生徒には数学の奥深さを

一方啓林館の教科書を拝見して、SSHでも使えるような、数学の発展的話題の多いところが特色と感じた。著者代表の根上さんの専門であるグラフ理論の応用などがそれとなく盛り込まれている。

それらの話題について教師自らが学び、生徒に数学の奥深さを知ってもらうこともできよう。

この実に楽しい教科書が江湖に迎えられることを願って止まない。

浪川 幸彦 なみかわ ゆきひこ

千葉県生まれ。東京大学理学系大学院修士課程修了。理学博士。名古屋大学理学部を経て、現在椋山女学園大学教育学部教授。専攻は代数幾何学（モジュラス理論）および数学教育学（数学リテラシー論）。中央教育審議会教育課程部会算数・数学専門部会委員として今回の学習指導要領改訂に関わる。

SSH校からみる『数学活用』

宮城 憲博

スーパーサイエンスハイスクール（SSH）校の指定を受けている高等学校は、平成24年度で178校にのぼるようになった。ここ数年間で、理数教育の在り方が大きく変わっていくことを肌で感じる。とりわけ、課題研究を中心とした取り組みは、今までの数学教育とは違った風を感じる。本校でもSSH中核拠点校として、「数学に特化」した取り組みを行っており、数学生徒研究発表会「マスフェスタ」を開催している。全国から数学に興味・関心ある生徒・教員が集まり、課題研究の成果発表を行っているが、素晴らしい内容が増えてきているのがよくわかる。しかし、その一方で、数学のテーマ選びが難しいという声も多く聞く。最初の1歩が大きなハードルとなっているのが事実だ。

『数学活用』は、これからの数学教育の在り方を見直す、まさに直球教材と思う。個々のテーマは、身近な素材を取り上げ、一歩踏み込んだところへ導いてくれる内容である。生徒にとっては宝箱のようなものである。特に、「もっと自由に考える」（p18）にあるように、「数学的思考の仕方」、「数学的考えの深め方」を導いている点が素晴ら



「素数ゼミと暗号」（数学活用）

しい。また、素材だけの提示だけで終わるのではなく、随所にある課題（緑●）が「数学的な発想の仕方」を導いてくれるのは教育的である。さらに、さりげなくコンピュータの活用についても紹介されているが、昨今の課題研究では欠かせないツールであり、それを示唆している。

数学の課題研究のテーマ選びは大きな悩みとなっているが、『数学活用』は、生徒たちの数学観を変化させ、数学的思考への導入本として大いに活用できる教材と思う。「受験数学から一步先へ」と考えてもよし、「少し回り道をしながら数学を眺めてみる」もよし、このあたりで数学教材との付き合い方を少し考え直す機会が来たように感じる。

宮城 憲博 みやぎのりひろ

東大阪市生まれ。大阪教育大学教育学部特別数学科を卒業後、大阪府で教鞭をとる。教員歴27年。現在、大阪府立大手前高校勤務。趣味は民族舞蹈。



「もっと自由に考える」(数学活用)

「数学活用」を活用する～SSH校の取り組み～

田中 紀子

「数学活用」は、事象を数理的に考察する能力を養い、数学を積極的に活用する態度を育てることを目標として設けられた科目であり、その理念は数学Ⅰ・数学Aの「課題学習」と通じている。

「数学活用」のテキストは「課題学習」の内容を補足したり、SSH校で取り組む「課題研究」の補助教材（副読本）になると考える。

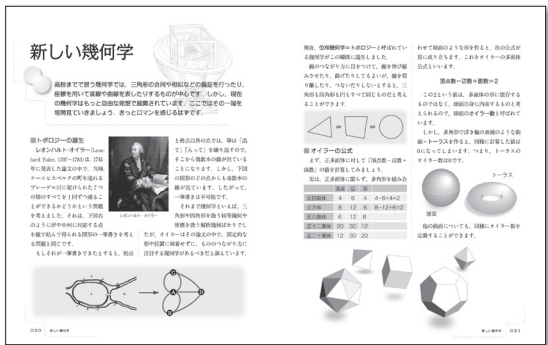
SSH校で生徒に数学の課題研究に取り組みせるにあたり、その課題内容の設定に苦労するという話をきく。自分で課題を決めて調べたり研究を進めることのできる生徒はよいが、そうでない生徒もいるのが実状である。そういう生徒に、数学と人間の活動や、社会生活と数学に関する様々なトピックスが取り上げられている「数学活用」は、生徒の興味関心を引き出し、主体的に数学的活動に取り組むきっかけを与えてくれるものであろう。

本校では、SSH科目を設け通常授業の内容と連携して①基礎的・基本的な知識・技能を身に付けた生徒、②幅広い数学的な見方や考え方を身に付けた生徒、③数学を積極的に活用し探究する姿勢を身に付けた生徒の育成を目指している。2年生理系のSSH科目では、応用的発展的な内容の習得に加えて、おもに長期休業中を利用して「課題研究」に取り組ませ、数学を積極的に活用し探究する姿勢を育成している。また、数学通信を発行して日常生活と数学の関係を紹介し、興味関心を持たせていた。数学通信では、今回の教科書にも掲載されている「新しい幾何学」(p30)や「数学者という人々」(p62)「無限とパラドックス」(p70)なども扱った。以前1年生の「総合的な学習の時間」において、本書にある「2進法の仕組み」(p16)の内容やビュフォンの針の実験を取り入れたこともある。また、昨年度のSSH校の生徒研究発表会では「財宝探しの問題」「塩の稜線」「誕生日は何曜日？」や和算等の研究発表があった。「数学活用」は多様な特性をもつ生徒に対応できる科目として設けられている。どのトピックス

を取り上げてもいいだろう。各校の生徒の実態や既習内容に配慮して取り扱うことで生徒に数学の楽しさが伝わればと願っている。

田中 紀子 たなかのりこ

島根県生まれ。大阪大学大学院理学研究科（数学専攻）修士課程修了。数学科教諭。愛知県立岡崎高等学校勤務9年目。SSH（数学）担当。



「新しい幾何学」(数学活用)

『数学活用』を数ⅠA「課題学習」で活用する

黄瀬 正敏

新学習指導要領の改訂に伴い、高等学校で課題学習が展開される部分について啓林館より執筆を依頼されました。その際、課題学習の目標を踏まえつつ生徒も教師も楽しめるように、なるべく定番でない話題を多く掲載するよう一所懸命書かせてもらいました。

一方、数学活用の教科書は今回の論題をいただいてから読ませてもらいました。数学の教科書とは思えない、読み物としてとても面白い内容でし

た。いろいろな話題が紹介されているだけでなく、深く考えたり教科の枠を飛び越えて広がる内容が多くありました。

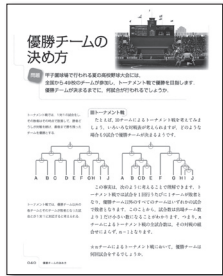
課題学習と数学活用では当然目標におけるズレが存在します。しかし、どちらも「…活用する態度を育てる」と結んでおり、精神面では同じです。大事なことは教師が「それ知ってる。」で終わらず、自らその話題を楽ししいと感じ、生徒に数学的活動を体験させる気持ちをもてるかによります。

教科書「数学活用」の活用はその点においても有効です。教師自身が面白いと感じる話題のみを課題学習として授業で扱いアレンジすれば良いのです。いわば課題学習の教員用資料集です。例えば私が数学活用の教科書を引用して課題学習を扱うならば、「優勝チームの決め方」(p40)を用いて「数学A第1章第2節順列・組合せ」のまとめとしてトーナメント戦やリーグ戦を紹介するだけではなく、複数のチームが同じチームの選手以外の全員と対戦するという規則の下で試合数が何試合となるかといった変形まで考えさせます。また、「数学パズルにチャレンジ!」(p50)を用いて「数学Ⅰ第1章第4節集合と命題」の『背理法』の有用性をまさに数学的活動によって体感させ、学習意欲の向上へと活用します。

一方で数学活用は課題学習とは違い、科目内の他の章の深い内容理解のためには設定されておらず、科目の流れの中で数学活用のすべてを扱うことは内容としてもまた時間的にも厳しいでしょう。数学活用・課題学習の目的である「…活用する態度を育てる」ことは現在の日本の教育における喫緊の課題です。新学習指導要領の精神の基、是非どの学校でも実践されることを心より願っております。

黄瀬 正敏 きせまさとし

京都市生まれ。島根大学理学部数学科を卒業。京都府立宮津高校・八幡高校・鳥羽高校を経て現在、海陽中等教育学校教諭。自称「数案エンターテイナー」。趣味は「数案」。田んぼの畔道が x 軸と y 軸、苗が格子点に見えたり、山並を見て極大・極小と考えたりしてしまう。

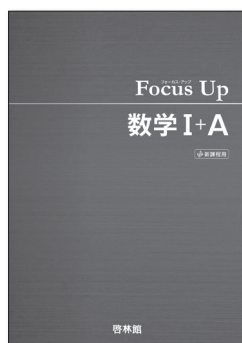


「Focus Up」活用法

Focus Gold・Focus Up
編集委員

竹内 英人

Hideto Takeuchi



この度の新課程にともない、Focus Goldの姉妹版である「Focus Up」も大きくリニューアルしました。この改訂で全国の先生方から、「内容が良くなった」、「より読みやすくなった」などのお褒めの言葉をいただき大変嬉しく思っています。一方で、「著者の立場から、Focus Upの効果的な活用法について教えて欲しい」というご意見が多々ありました。そこで、今回は、「Focus Up」の特徴と、より効果的な「活用法」についてお話ししたいと思います。(Focus Upに限らず、他の参考書でも参考になりますので、読んでいただくと幸いです。)

まず、「Focus Up」の特徴についてですが、「Focus Gold」が難関大学を目指す生徒を対象にした参考書とするなら、「Focus Up」は標準レベルの大学を目指す生徒を対象としています。コンセプトは、『「Focus Gold」の良いところは生かし、より標準レベルに必要な内容を盛り込む』です。

① 標準的な解答を丁寧な記述で解説

従来Focus Upでご支持いただいていた、「生徒の視点に立った解答」に加え、近年の生徒の学力も踏まえ、行間を飛ばさずに、より丁寧な解答の記述を心がけました。これは、近年の大学入試で指摘されている「日本語の記述不足による数式の羅列」といった記述力の低下に対して、より記述力を高めるために、実際の入試の採点者の視点で「入試において合格答案」となる必要かつ十分な解答を再現しました。

② 問題数を抑え、本当に必要なミニマムエッセンスに絞る

参考書である以上、網羅性は考慮しつつも、何でもかんでも載せるということはせずに、この先の問題にも力が発揮できるための土台となる重要問題を配列しました。100の問題を解くのに100の例題を載せるのではなく、「100の問題につながる50の問題を」というコンセプトで問題を選択し、「これだけは絶対身に付けておくべき重要問題」が掲載されています。

③ 一つ一つの例題のポイントを明確にする

②で挙げたように、問題数は絞っています。標準レベルの大学を目指す生徒にとっては、本当に重要な問題を一つ一つ完璧にした方が良く考えたからです。そのためFocus Upでは、例題のポイントや注意点などを整理・定着させるために例題すべてに、「Focus」として「1行フレーズ」を載せました。この「Focus」が自然と口から出るくらい、反復演習することによって、他の問題への応用が利くようになります。

以上、Focus Upの主な特徴でした。では、次に、このFocus Upをより効果的に活用していただくためのヒントを挙げたいと思います。

① 日々の授業のサポート役として

授業を受けて、「よく分かった」と感じる生徒の中にも、実際は「分かったつもり」のままの生徒も少なくありません。そこで、ただ問題演習に取り組むだけではなく、授業で習った内容を確実に

に理解した上で問題に取り組むことが、「分かる」→「できる」への近道です。Focus Upではそうした日々の学習の手助けとなるように、現場の先生方の声を取り入れ、普段の授業に合わせた解説、解答を心がけました。問題を解きながら、授業の復習ができます。Focus Upを日々の授業の復習教材として使うことで、より確実な定着へとつながるでしょう。

② 定期考査対策として

多くの学校では、定期考査の範囲は、教科書と傍用問題集が中心でしょう。しかし、実際は、問題集は別冊解答を配布するかどうかという問題点があります。一方、考え方は徹底的に参考書で類題を調べ自分で考えさせるというスタイルで大きな成果を上げている学校や、傍用問題集は使わずに参考書の例題と練習だけに絞って、繰り返し解かせることで、確実な定着を図っている学校もあります。Focus Upでは、定期考査で重要となる問題は、もれなく載せています。定期考査前に各節はじめの「まとめ」で既習事項を整理し、check例題を中心に確認をすることでより学習効率が上がるでしょう。

③ 週末課題、長期休業中の課題として、さらに実力考査の教材として

参考書の利用方法として一番多い活用法だと思います。週末や長期休業中の課題として出し、その成果を実力考査で計る、ということでしょうか。多くの進学校においては、3年間のシラバスの柱として実力考査の範囲を定めているのではないのでしょうか。つまり、生徒にとって「この時期に何を学習すればよいのか」といった学習の指針に参考書を利用する方法です。Focus Upでは、定期考査のレベルよりは一段上の***の例題や本格的な入試問題の一手手前の節末問題を実力考査や長期休業中の課題に上手く活用することで、標準的な入試問題を解く上での土台（基礎学力）が身につくような構成となっています。

④ 3年生の入試対策として

一般的に入試対策は、専用の問題集を使用する学校が多いようです。しかし、実際に生徒に接していると、ただ闇雲に問題に取り組んでいるように見えます。つまり、「この目の前の問題が学習した内容とどう繋がっているか、どのような知識を有機的に結びつけて問題に対峙すれば良いか」ということをあまり意識せずに問題と格闘しているようです。この一番の原因は、「入試問題を解くことと日々の学習を切り離して考えている」ところにあります。一方、難関大学に合格する生徒は、「日々の学習の延長線上に入試問題があること」を理解しています。東大・京大に合格するような生徒ほど、基礎の大切さが分かっています。ここで言う「基礎」とは問題を解く上で、安定した力を発揮できる土台のことです。では、こうした基礎力を身につけるにはどうしたらよいでしょう。それは、標準的な良問を系統的に学び、頭の中に学習内容のネットワークを作ることです。Focus Upでは、「いかに最短でこのネットワークを作ることが出来るか」に徹底的にこだわりました。それが章末問題です。問題数にしてはただか数十題しかありませんが、「本当に必要な問題」だけに絞って精選しました。この章末問題を、実際の3年生の演習に入る前の土台作りとして、もしくは重要問題の再確認として活用することによって、本格的な演習問題にスムーズに入ることが出来ると思います。

以上、「Focus Upの効果的な活用法」について述べましたが、やはり大事なことは、単に参考書を持たせる（買わせる）指導から、「入学時から受験時まで、絶えず参考書を意識させた学習、生徒の学習の傍らにはいつもFocusがおいてある」、そんな学習環境を作ることが、参考書学習を成功させるための一番の秘訣です。今後とも先生方のご指導を受け、より良い参考書、問題集づくりをして参りたいと思いますのでよろしくお願いいたします。

「Focus Gold」と新科目「数学活用」との連携を考える

Focus Gold・Focus Up
編集委員

豊田 敏盟
Toshiaki Toyoda

新科目「数学活用」の目標に、「数学と人間とのかかわりや数学の社会的有用性についての認識を深めるとともに、事象を数理的に考察する能力を養い、数学を積極的に活用する態度を育てる」とあります。そこで、「Focus Gold」と「数学活用」との連携について今回と次回の2回に分けて考えてみます。

公園で、2人の子どもがジャンケンを行い、勝ったら目標に向かって1歩あゆみ、負ければその場に止まるという、ジャンケン遊びを見かけました。

このような遊びは誰でも経験あると思いますが、私はこの光景から、新科目「数学活用」の教材案として、次の【問題1】【問題2】を考えました。

【問題1】

15段あるビルの階段で、弟と兄が次のゲームをしました。

2人がジャンケンをして、弟は勝ったら3段上り、負けても2段上る。兄は勝ったら4段上り、負けたらその段に止まる。

2人はフロアを出発し、ジャンケンを繰り返しながら階段を上り、どちらか一方が15段目に着いたらゲームを終了する。

弟と兄のジャンケンの強さは同じ、各回とも勝負がつくまでジャンケンを行うとして、次の問いに答えなさい。

- (1) 弟が、兄より先に、15段目にピッタリ着くとき、弟のジャンケンの勝ち数と負け数はいくらか。
- (2) 弟と兄とでは、どちらが先に15段目に着く可能性が高いか。

(1)の略解 (Gold I + A例題227の類題)

弟の勝ち数を x 、負け数を y とすると、兄の勝ち数は y 、負け数は x で、

$$\text{弟が階段を上る数から } 3x+2y=15 \quad \cdots \textcircled{1},$$

$$\text{兄が階段を上る数から } 0 \leq 4y < 15 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。

①を $2y=3(5-x)(\geq 0)$ と変形すると。

2と3は互いに素で、 x, y は整数より、

$$5-x=2k, y=3k \quad (k \text{ は整数}) \text{ とおけ、}$$

$$0 \leq x \leq 5 \text{ より、} k=0, 1, 2$$

(i) $k=0$ なら $x=5, y=0$ このとき、兄の勝ち数 $y=0$ は②を満たす。

(ii) $k=1$ なら $x=3, y=3$ このとき、兄の勝ち数 $y=3$ は②を満たす。

(iii) $k=2$ なら $x=1, y=6$ このとき、兄の勝ち数 $y=6$ は②を満たさないから不適。

以上から、弟が5勝0敗、または、3勝3敗のとき、弟は兄より先に15段目に着く。

(2)の略解 (Gold I + A例題211, 227, 244の類題)

生徒は、弟と兄の各々について、先に15段目に着く場合は何通りあるかで、その可能性の高さを判断しがちです。でも、場合の数だけでなく、それが起きる確率も考える必要があります。

〈兄が先に着く場合〉

連立不等式 $15 \leq 4y \leq 18, 0 \leq 3x+2y < 15$ を満たす整数 x, y を求め、そのことが起こる確率を調べる。

まず、 $15 \leq 4y \leq 18$ から、整数 y は $y=4$

$y=4$ を $0 \leq 3x+2y < 15$ に代入して $0 \leq 3x < 7$

これを満たす整数 x は $x=0, 1, 2$

よって、 $(x, y)=(0, 4), (1, 4), (2, 4)$

そして、各々が起こる確率は、

$$(i) (x, y)=(0, 4) \text{ に対しては } \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$(ii) (x, y)=(1, 4) \text{ に対しては、}$$

兄は4回まで3勝1敗で、5回目に勝たなければならないから、 ${}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$

$$(iii) (x, y)=(2, 4) \text{ に対しては、}$$

兄は5回まで3勝2敗で、6回目に勝たなければならないから、 ${}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$

以上から、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + {}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{32}$$

〈弟が先に着く場合〉

$3x+2y=15, 16, 17$ 、かつ、 $0 \leq 4y < 15$ を満たす自然数 (x, y) を求め、そのことが起こる確率を調べる。

$$(i) 3x+2y=15 \text{ の場合、(1)により、}$$

$$(x, y)=(5, 0), (3, 3)$$

$$(x, y)=(5, 0) \text{ の確率は、 } \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$(x, y)=(3, 3) \text{ に対しては、弟はピッタリ}$$

$$15 \text{ 段目に着くから、 } {}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$\text{よって、 } \left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$(ii) 3x+2y=16 \text{ の場合}$$

この式を $3x=2(8-y)$ と変形

2と3は互いに素で、 x, y は整数より、

$$x=2k, 8-y=3k \quad (k \text{ は整数}) \text{ とおけ、}$$

$$0 \leq 4y < 15 \text{ より、 } 0 \leq 4(8-3k) < 15$$

$$\text{つまり、 } \frac{17}{12} < k \leq \frac{8}{3}$$

$$\text{よって、 } k=2 \text{ で } (x, y)=(4, 2)$$

$$(x, y)=(4, 2) \text{ となる確率は、 } {}_6C_2\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$(iii) 3x+2y=17 \text{ の場合}$$

$3x+2y=17$ は、特殊解 $(x, y)=(5, 1)$

を用いると、 $3(x-5)=2(1-y)$ と変形できる。2と3は互いに素で、 x, y は整数より、

$$x-5=2k, 1-y=3k \quad (k \text{ は整数}) \text{ とおけ、}$$

$$0 \leq 4y < 15 \text{ より、 } 0 \leq 4(1-3k) < 15,$$

$$\text{つまり、 } -\frac{11}{12} < k \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{よって、 } k=0 \text{ から、 } (x, y)=(5, 1)$$

ただし、この場合、6回目に3段昇ることが条件より、 $(x, y)=(5, 1)$ となる確率は、

$${}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$(i)(ii)(iii) \text{ から、}$$

$$11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}_6C_2\left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{21}{32}$$

弟と兄とではどちらが先に15段目に着く可能性が高いか、確率の差を求めると、

$$\frac{21}{32} - \frac{11}{32} = \frac{5}{16} > 0 \text{ したがって、弟の方が早く着く可能性が高い。}$$

兄の弟への思いやりが覗えるゲームルールで、確率の上からも、弟の方が有利という結果になりましたね。

このようなジャンケン・ゲームは幾つか想定できるものの、生徒にとって正答に至るにはなかなかの知恵が必要です。でも、先生と生徒と一緒に、数学活用に関する題材や必要・十分な解決策を模索することは楽しいことではないでしょうか。

では、次の【問題2】を考えてみてください。

【問題2】(解説は次号でします。)

弟と兄がジャンケンを行い、弟が勝ったら階段を3段昇り、負けたら1段下る。兄が勝ったら2段昇り、負けたら1段下る。2人は同じ段から出発、ジャンケンを繰り返しながら移動し、どちらかが最上段に着いたらゲームを終了する。

弟と兄のジャンケンの強さは同じ、各回とも勝負がつくまでジャンケンを行うとして、

(1) ジャンケンを10回終えたところで、2人のいずれかが最上段に達してゲームが終了するとすれば、この段数は何段か。

(2) 出発後、兄弟が初めて同じ段に立つのは、ジャンケンを何回行い、弟が何回勝ったときか。

(3) ジャンケンを n 回 ($n \geq 3$) 行ったとき、弟と兄の階段の差が初めて8段になった。このとき、ジャンケンの回数 n と弟の勝った回数を求めよ。

1. はじめに

本校では教科書傍用問題集以外の副教材の利用は、各教科担当の裁量に任されています。今までは、長期休暇中の課題として、手製の問題演習プリントや市販の問題集を課していることがほとんどでした。そのような中、3年前から「Focus Gold」を全生徒に配布して課題として取り組ませることを始めました。今回、「Focus Gold通信」の執筆依頼を受け、私の「Focus Gold」利用法と生徒の反応をお話しさせて頂くことにします。

2. 早稲田中高等学校について

早稲田中高等学校は中高一貫の男子校です。高校からの募集はしておりません。そのため、6年というスパンでカリキュラムが組まれています。早稲田大学の係属校ではあるのですが、学年の定員300人に対して、早稲田大学への推薦枠は170人ほどです。また、各学部、学科に定員があるため、全員を希望の学部、学科に推薦することはできません。そのため、高校3年間の成績と高3時に校内で実施する「総合学力試験」で推薦のための序列をつけています。この「総合学力試験」は大学入試問題と同レベルであるため、推薦合格を目指している者も通常の受験勉強をしていかななくてはなりません。10数年前までは、概ね成績上位者が早稲田大学への推薦を受けていたのですが、最近是全体的に受験の意識が高まってきており、成績上位者の2割から3割の生徒が推薦の申請をせず、一般入試で合格して難関大学に進学しています。特に、理系は国立大学や医学部への進学希望者が多く、早稲田大学一理工学部の推薦枠が埋まらない状態がここ数年続いています。このように、本校は早稲田大学の付属、継続校の中では異質の受験校であると言えます。

数学のカリキュラムは、高校2年までに受験範囲（教科書レベル）の講義を終え、高校3年時は

入試問題の演習を中心とした授業が行われています。高校1年修了時までの合計20時間（各学年5時間）で、数学ⅡBまでの範囲が終わるわけですが、これは中高一貫の男子受験校の中では極めて少ないのではないかと思います。授業は中学2年の2学期から高校課程に入っていますが、それでも授業中に十分な演習はできません。また、発展的な内容に詳しく触れることもできません。このような現実が『Focus Gold全員配布』を決断させたと言えると思います。

3. 長期休暇課題としての利用一例

「Focus Gold 数学Ⅰ+A」を全員に配布したのは、中学2年の終わりです。高校課程に入ってから半年ほど（高校課程の授業はこの間週3時間）が過ぎていたので、その復習を春休みにさせたいと考えていました。中学課程の内容であれば、答えと簡単な解法があれば、概ね全問解くことができます。そして、解けなかった問題の質問に対しては、授業の一部を使って回答するとか個人的に回答することで済みました。しかし、高校課程はそうはいかないであろうと考えていました。課題を出しても、その多くが解けず、十分な解説をうけることもなくそのままになってしまえば、課題を課す意味がないと考えました。授業時間を割いて長期休暇課題の後始末をすることも避けたかったので、詳しい解答と解説が載っている参考書を課題として検討しました。いくつかある数学の参考書の中から、内容をみて「Focus Gold」を選んだわけですが、市販されていない（つまり誰も持っていないはず）ということも理由の一つでした。「Focus Gold」を利用した最初の課題は、

2010 数学春期課題（中学2年）
Focus Gold 数学Ⅰ+A
「第1章 方程式と不等式」
－下段の練習問題（全52問）

解答を読みながら解いたという者もいたと思いますが、提出されたノートは全問が解かれていました。課題の達成度をみる試験を課したのですが、課題に関する質問は1件もありませんでした。本冊中の例題の解答と解説、そして別冊の詳細な解答があったからだだと思います。解答のある課題を出すことに否定的な意見もあるかと思いますが、私は長期課題にはいつも解答を配布するようにしています。自分が学生であった時のことを思い出すと、答えだけの課題は解くのに苦労をしたし、自分の解法の正誤や記述不足が分からずスッキリしない不快さがありました。しっかりと自習して力をつけたいと思っている生徒ほど解答を必要としていると思います。解答写しをさせないことを考えるより、伸びようとしている生徒が気持ちよく学習できることを考えた方が、全体としては効果的であると考えています。

授業が進まない長期休暇中は、復習や問題演習をするのにはもってこいの期間です。成績が振るわない者は基礎から復習した方が良いでしょうし、成績良好の者は発展的な演習をしていくのが良いでしょう。また、1冊の問題集の中でも解ける問題と解けない問題は、個人個人異なっているはずですから、全員に同じ復習課題を課した場合、効率的で効果的であったと言えるのは一部の生徒になってしまうような気がします。本来、必要とされている課題は個人で異なっているべきですが、300人の生徒全員の達成度を確認し、それに合わせて課題を課すことは困難です。そこで、夏休みは次のような課題を課しました。

2010 数学夏期課題（中学3年）
B5サイズノート（30枚以上綴り、60ページ以上）1冊分の問題演習
ただし、下記の必修問題（34問）を含めること。

〈必修問題〉Focus Gold 数学Ⅰ+A 下段の練習問題

「第2章 2次関数」－68～78（計11問）、
88～108（計21問）

「第7章 命題と論理」－247, 248（2問）

※課題用のB5サイズノートを用意し、1ページに大問1問または2問の割合で解答しなさい。

※必修問題の他は、自分に必要と考える問題や取り組みたい問題を各自で選んで演習しなさい。（Focus Gold、傍用問題集、教科書、他）

必修問題は、1学期に学習した範囲の問題でした。文面から分かる通り、必修問題以外に最低限26問を自分で選んで解く必要があったわけですが、多くの生徒はFocus Goldの既習範囲の基本問題を解いていました。その一方で予想通り、成績上位の者はFocus Goldの発展的な問題（Focus Goldは問題のレベルが*印で4段階に分けられている）を解いたり、数学オリンピックの過去問題を解いていたり、大学入試問題を解いていたりしました。

「Focus Gold」には、基本的な問題からかなり発展的な問題まで幅広く掲載されており、問題レベルも分かり易く分類されています。このことを利用して、冬休みには次のような課題を出しました。

2010 数学冬期課題 (中学3年)

Focus Gold 数学 I+Aの「第3章 図形と計量」(練習109~147) および数学 II+Bの「第4章 三角関数」(練習114~140)の範囲から練習問題を40問以上

※各問題についている*印は、*が多いほどレベルの高い問題であることを意味しています。

数学 I+Aの第3章は、* (3問),
** (14問), *** (17問),
**** (5問)
数学 II+Bの第4章は、* (4問),
** (12問), *** (9問),
**** (2問)

です。各自の力量と意欲に合わせて40問以上を選んで下さい。

※課題用のB5サイズノートを用意し、1ページに大問1問または2問の割合で解答しなさい。

このような形で課題を出したところ、*の数を参考にしながら力量に合わせて40問以上を選ぶことができたようです。実力のある者が易しい問題ばかりを選ぶこともなく、自分にとって価値のある課題選択が出来たのではないかと思います。自分に今必要な演習(課題)が何なのか…。この判断と的確な選択ができることが効率よく実力を上げていくことになるのだと感じています。入学してからバカがつくほど真面目かつ丁寧に問題集を解いてくる生徒がいます。当然、成績は最上位の状態が続くわけですが、受験期になると意外と伸び悩むことがよくあります。真面目な生徒ほど、与えられた問題集を隅から隅まで丁寧に解いていくわけですが、その中にはもう十分に実力として定着していて、復習する必要のない問題も多くあるわけです。そのような問題を丁寧に解くよりも、実力として定着していない分野、苦手としている

分野、反復練習によって処理速度を上げなくてはならない分野など、自分のニーズに合った問題だけを選択して解いていった方が、効率よく実力を上げることができます。高校3年になって成績が急伸する生徒がいますが、そのような生徒は短時間でいかに実力を上げるかということを考えていて、自分にとって必要度の高い分野から要領よく学習しています。受験期には、高度な思考力と莫大な知識を身につけることが要求され、誰一人として時間に余裕などありません。軽く流す部分と力を入れる部分の選別ができる判断力をつけることが、受験の成功にも繋がるのだと感じています。また、その判断力は社会に出て役につながるのではないかと思います。

Focus Goldを利用した長期休暇課題はこのあと3回実施し、自分のための勉強をするということがだいぶ定着してきたように感じています。

4. Focus Gold におまかせ

長期休暇中の課題として「Focus Gold」を全員に配布したわけですが、授業の補助として利用することも何度かありました。特に、『Column(コラム)』に書かれていることをよく利用しました。その利用例のいくつかをご紹介します。

「空間ベクトル」の講義の中で、外積について説明をしました。外積の計算法と図形的な意味、さらにその利用法をまとめたプリントを配って解説をしました。そして、最後に「外積については、Focus Goldにも詳しく書かれているので、そちらも参考にしなさい。」と付け加えました。Focus Goldにはより詳しく解説がされていたので、生徒の理解をより深めることができました。

「微分法」の講義の中で、放物線の点Pから放物線に2本の接線を引く問題がありました。2接点をA、Bとしたとき、3点A、P、Bのx座標について、PはAとBの平均(中央の点)になりますが、時間の関係でその証明を省きました。「このことの証明は、Focus GoldのColumnにありますので、読んでおきなさい。」で済ませることができました。

「積分法」の講義の中で、放物線に引いた2本の接線と放物線で囲まれた面積、さらにそれに関係して、放物線の接線とy軸に平行な直線と放物線で囲まれた部分の面積について公式化しましたが、細かな(複雑な)計算を省略しました。「この詳細な計算は、Focus GoldのColumnにありますので、気になる人は確認しなさい。」で済ませました。

Focus Gold(特にColumn)には、授業中に補充しておきたい発展的なことがほとんど載っています。板書だけでは定着しないのでプリントを用意して解説する機会が多いのですが、Focus Goldにも載っていると話す、生徒たちはより重要性を感じるようです。

5. 生徒の反応

数学 II Bまでの範囲が終わったところで、あるクラス(41人)で「Focus Gold」についてアンケートをとってみました。

①「Focus Gold」を課題以外で利用したことがある…25人

その中で、例題や練習問題を解いた…24人
まとめのページを読んだ…19人
コラムを読んだ…19人
章末問題やチャレンジ問題を解いた…15人

②解答は、わかりやすい…19人、だいたいわかる…21人、わかりにくい…1人

③図や表は、多いと思う…12人、普通の量だと思う…29人、少ないと思う…0人

さらに、「感想または意見」の欄にあった言葉をいくつかあげてみます。

- ・長期休み中に復習をするとき、とてもたよりになります。
- ・分からない問題があるときに、資料として利用しています。
- ・「Focus Gold」で学習すると、その単元の内容がよく理解できます。
- ・解法がたくさん載っていて助かります。
- ・問題が難易度別にまとまっていて解きやすいです。

- ・試験前に目を通しておくと、ためになることが多くて助かります。
- ・忘れかけている公式や問題の解き方を確認するのに使っています。
- ・別冊「公式集」がめっちゃ使えます。
- ・右側に使った公式の説明があって良い。
- ・コラムの話がとても興味深いです。
- ・標準と発展の間のレベルの問題がもっとあると良いと思います。

と、生徒には概ね好評でした。

副教材としては少々高価であるため、全員配布には多少の戸惑いもありましたが、今は配布して良かったと思っています。

伊藤 潔 いとう きよし

東京都生まれ。東京理科大学理学部を卒業。私立海城学園に専任教諭として9年間勤務した後、私立早稲田中等学校に転校。現在、高校2年学年主任、広報委員会責任者。

