理数教育の未来へ
啓林館
http://www.shinko-keirin.co.jp/

〒543-0052	大阪市天王寺区大道4-3-25	TEL.06-6779-1531	FAX.06-6779-5011
〒113-0023	東京都文京区向丘2-3-10	TEL.03-3814-2151	FAX.03-3814-2159
〒003-0005	札幌市白石区東札幌5条2-6-1	TEL.011-842-8595	FAX.011-842-8594
〒461-0004	名古屋市東区葵1-4-34 双栄ビル2F	TEL.052-935-2585	FAX.052-936-4541
〒732-0052	広島市東区光町1-7-11 広島CDビル5F	TEL.082-261-7246	FAX.082-261-5400
〒810-0022	福岡市中央区薬院1-5-6 ハイヒルズビル5F	TEL.092-725-6677	FAX.092-725-6680

20111101

啓林館

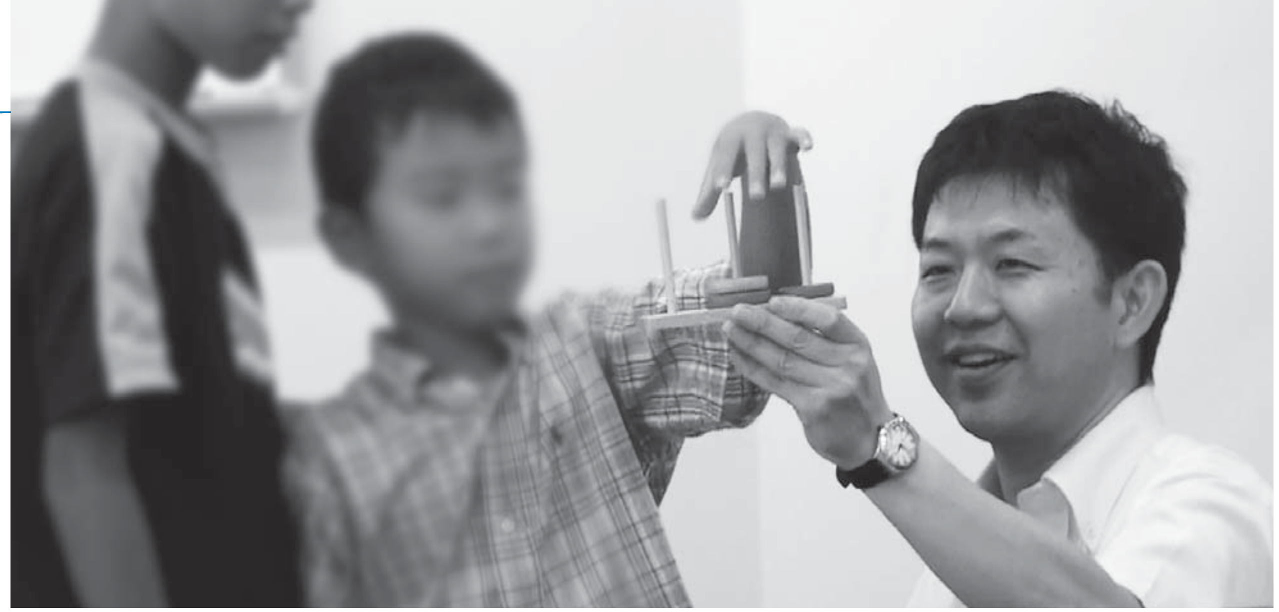
啓林館 高校数学 教育情報誌

Focus Gold 通信
フォーカスゴールド

vol.1

「フォーカスゴールド通信」創刊に当たって

フォーカスゴールド編集委員
竹内 英人
Hideto Takeuchi



「親子算数教室」で子どもたちとハノイの塔を楽しむ著者

この度は「フォーカスゴールド通信」をお手にとっていただき有り難うございます。

早いもので，フォーカスゴールドシリーズが創刊され5年が経ちました。この間，全国の多くの先生方や生徒さんの支持を受け，全国の進学校を中心にフォーカスゴールドの輪が広がっていきました。私自身はフォーカスゴールドの企画段階から関わっていますが，フォーカスゴールドを作るに当たっては様々な点に注意しながら作成してきたつもりです。そのいくつかを挙げてみますと，

①学校現場の先生方の意見を最大限に取り入れること

これについては，生徒の学力や効果的な指導法については高校の先生方が一番よく分かっているという考えが根底にあります。どのレベルの生徒にどのような指導法が効果的であるか，どの部分で生徒がつまずきやすいか，どのような説明が生徒にとって分かりやすいのか，どんなヒントを与えるべきか，問題の配列はどのようにしたらよいか，絶対に取り上げる問題はどの問題か，など先生方の日頃の授業のノウハウを出来る限り反映したいと考えました。そこで，全国にフォーカスゴールド特別編集委員会という組織を立ち上げ，全国各地の先生方に指導・助言をいただき，多くの意見を取り入れました。

②生徒目線に立った解説

参考書を使うのは生徒です。特に参考書は日頃の自学自習で，授業の補助教材として，また問題演習の辞書的な役割として使用する場面が多いと思われます。そこで，我々は参考書を「常に自分の傍らにいてくれる家庭教師」という位置づけで考えました。つまり，分からない問題があったとき，フォーカスゴールドを見ればどんな問題でも丁寧に解説してくれる。さらには，どこへフィードバックすればよいかといったアドバイスまでしてくれる。そんな存在であって欲しいと考えました。

そこで，解説・解答も生徒にとってオーソドックスで利用価値が高く，応用が利く考え方を採用しました。また，途中の式なども極力省略せずに行間に飛躍がない解答づくりを心がけました。さらに，①にも関連しますが，日頃，学校の先生方が授業において指導されている解説方法を可能な限り再現しました。つまり，日常の授業と参考書の内容に大きなギャップがないように心がけたつもりです。もちろん，必要であると思われる別解などはもれなく載せてあります。

③1冊で日常の学習から大学受験まで通用する内容

生徒さんは高校入学から卒業までに一体，何冊の問題集，参考書を手にするのでしょう。単純に考えただけでも，教科書，教科書傍用問題集，参考書，入試問題集，センター対策問題集，さらには塾のテキスト，自身で購入した参考書・・・・。本当にこれだけの数をこなさないと難関大学の数学は対処できないのでしょうか。そんな疑問から，我々執筆陣は，「量の学習から質の学習への転換」を掲げ，フォーカスゴールドを「1年生の定期テスト対策から難関大学入試まで対応できる1冊」として作り上げてきました。よって1冊のページ数は他の参考書に比べるとかなり多いかもしれませんが，「この1冊を繰り返し，繰り返し学習すれば，東大でさえ合格できる」，というコンセプトで作りました。近年，全国の進学校においても，問題集，参考書を何冊も買わせるのではなく，同じものを何回も繰り返し学習させるという方向に転換する学校も多く，確実な成果を上げています。フォーカスゴールドも「1冊をボロボロになるまで」そんな使い方をしていただければ幸せだなぁと思っています。「フォーカスゴールド1冊で東大合格」そんな報告を楽しみにしています。

④コラムの充実

私自身もフォーカスゴールドには多くのコラムを書きました。単なるおまけではなく，本編以上に力を入れて書いたつもりです。特に，単に日常との関わりといった従来の「数学基礎」的なコラムだけではなく，生徒自身が日頃の授業で疑問に思っている内容や，先生方が説明しづらい内容，問題の背景的な内容など，従来の参考書にあるコラムとは一線を画した内容を多く取り入れたつもりです。お陰様で，全国の先生方や生徒さんにとってコラムは大変好評であり，改訂版においても一層張り切ってコラムを増やしました（コラムが一番面白いと言ってくれる生徒さんも多く，嬉しいような複雑な気分ですが・・・）。コラムを通じて一人でも多くの生徒さんが，単に数学の問題が解ける喜びだけでなく，「数学って面白いなぁ，奥が深いなぁ」と思ってくれればこれ以上の喜びはありません。

以上のように，フォーカスゴールドには我々執筆陣の熱い思いを十分に盛り込んだつもりです。一言で言えば，「自分が高校生の時，こんな参考書が欲しかった」という思いを胸に作ってきました。まだまだ未熟な点はあると思いますが，これからも，全国の先生，生徒さんのご指導，ご助言，ご感想をもとに，新課程バージョンにおいてもますます進化していくつもりです。今後ともフォーカスゴールドをよろしくお願いいたします。

そして，この「フォーカスゴールド通信」が，教材研究に関する情報発信・交換に少しでも役に立ち，さらにフォーカスゴールドの輪が広がることを心から願っています。

竹内 英人 たけうち ひでと

千葉県生まれ。神戸大学大学院教育学研究科修了。愛知県の公立高校教員を経て現在，名城大学教職センター，大学学校づくり研究科 准教授。専門は 数学教育。 著書／「なぜ数学を学ぶのか」（岩波ジュニア新書）「学力向上につながる数学の題材」（東京法令，共著）など。趣味／サッカー，マラソン，食べ歩き（B級グルメ専門），数学教育について考えること。

特集 新課程「データの分析」導入の背景と指導の視点・入試への対応

東洋大学教授　渡辺美智子

はじめに

ご存じのように新課程では，数学Ⅰが共通必履修科目になり，その内容はすべての高校で必ず教えられることになっている。その中で注目されている単元が「データの分析」で，これまで数学ではあまり重視されてこなかった統計の内容が扱われている。統計に関しては，現行の数学Bに「統計とコンピュータ」があるものの選択率はわずか数パーセントで，多くの高校ではこれまで教えられてこなかった。そのため授業研究や指導案などの実績が少なく，現場の先生方は今回，非常に戸惑われていることと思われる。

また，単元名「データの分析」が示すように，ここでは単に統計グラフや統計量の知識を生徒が学習すればよいというだけではなく，実際にデータを分析して活用する力を身に付けさせることが意図されており，これは必ずしも大学等の教職課程で以前から普通に開講されていた科目内容でもないので，その中に新しく入っている四分位数や箱ひげ図などの活用の仕方も含めて，自身が学んだ経験がないと感じている先生も少なくはないはずである。

ではなぜ急に，従来の数学教育の中では異質とも思えるコンテクスト（文脈）ベースのデータを扱う統計内容が入ってきたのか，その背景を以下に説明する。

産業界での数学ニーズの拡大
―数学イノベーションをめぐる国際競争―

インターネットショッピングや電子マネーでの買い物，スイカやパスモなどによる交通移動，電子メールやPCを使った社内での仕事，レストランでのオーダー端末，コンビニやスーパーのPOSレジシステム，Googleでの検索記録等々，ICTとネットワーク技術の発展によって，ビジネスの世界では私たちの消費行動や活動の記録が膨大なデータとして蓄積されている。またビジネスの世界だけではなく，医療記録や保険請求の電子化データ，気象衛星からの膨大な気象観測データ，遺伝子（ゲノム）データ，プロサッカーリーグでの選手とボールの追尾システムなど，ありとあらゆる分野で膨大なデータが取られ，その分析が従来の意思決定のスタイルを大きく変革させている。例えば，「その数学が戦略を決める」や「本田にパスの36%を集中せよ～ザックJAPAN vs. 岡田ジャパンのデータ解析」，「分析力を駆使する企業～発展の五段階；あらゆる業界で膨大なデータの活用が始まっている」などの本を参照されるとこのあたりの変化が実感できる。

日進月歩で進むコンピュータ通信ネットワーク技術と計測技術の進歩で，膨大な量のデータにほぼリアルタイムでアクセスできる環境にあって，データからその分野の諸種のプロセスを最適化する数学の技術とその技術を有している人材へのニーズが世界的に非常に大きくなっている。IBMのCM：地球をスマートに！は，まさに金融からエンターテイメントに至るまでがデータによって最適化され，ビジネスや生活の無駄がなくなるサービスが提供されることを意味している。そしてその鍵を握るのが数学のアルゴリズム，つまりデータからのパターンを発見する（モデリング）アルゴリズムというわけである。

数学はもう以前のように理論が中心で一部の数学研究者の研究対象というだけのものではなく，一足飛びに極めて実用的なソリューションビジネスのツールになって大きな雇用を生み出している。日本は，大学にこのための人材を輩出する統計学科を持たない，おそらく世界でも唯一の国ではないかと思うが，世界では数学科とは独立して統計学科が大学にあることは普通で，そのため，データ分析を専門とするスタティスティシャン（statistician；統計家）という職業区分が公的に認知されており，21世紀の最も魅力的な職業はスタティスティシャンであるとか，スタティスティシャンの給与が平均で26%以上，増加したという政府発表等が最近のニューヨークタイムズ紙やUSA Today紙に記事として発表されている。

つまり，数学の中の統計とデータ分析の位置付けが産業界や社会生活の中で非常に大きくなっているわけである。

国際社会が推進する統計教育のパラダイムシフト

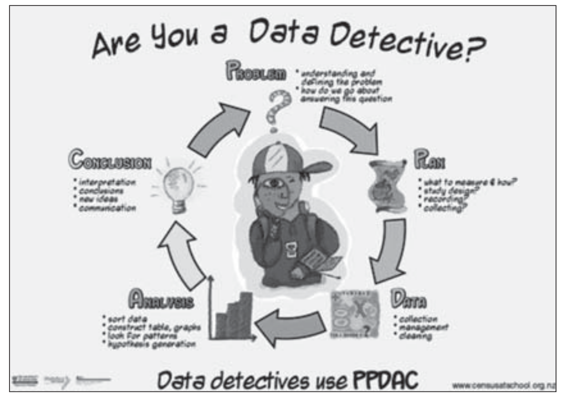
上記のような社会的変化を見据えて，1974年にフィールズ賞を受賞した代数幾何学を専門とする世界的数学者のデヴィット・マンフォード博士は，1999年に“The Dawning of the Age of Stochasticity”, Mathematics Towards the Third Millenniumを発表し，第3千年紀の数学研究は不確実性（統計・確率）を中心とする内容に向かうと指摘している。その後，米国の科学研究財団は重点領域に数学を採用し，その中の重要テーマとして，“巨大データに関する数学的・統計的挑戦”，“不確実性の管理とモデリング”，“複雑な非線形システムのモデリング”を挙げ，同時にその人材育成のための教育改革を推進している。2000年にはアメリカ数学教師協議会，2003年にはOECDの国際学習到達度調査(PISA) が，統計と確率，不確実性の数理は，従来に比べ相当重要な位置を与えられるべきであると勧告し，2007年には国際数学教育委員会（ICMI）でも，時代に即した数学教育の理論と実践の課題を取り上げる中で，学校教育の中で統計教育の重要性に鑑み，国際統計教育協会（IASE）との共同での調査研究を立ち上げるなど，数学教育の中で統計と確率の教育を系統化し教材と評価方法の開発研究を推進することは，国際的な動きになっている。

求められている新時代の統計教育

新時代の統計教育は，“データからパターンを発見し文脈に沿ったアクションに結び付ける態度の育成”がキーとなっている。そこでは，課題発見と問題解決におけるデータの有用性を知り，データのばらつきの概念と基本的なデータの読み方とまとめ方，そこからの情報の抽出と新知識の創出に至る一連のプロセスを理解し，身近な問題で実践する統計的思考力の育成を目的としている。

そのため，不確実性を伴う現実の課題をデータのばらつき（分布）の問題として捉え，確率モデルに基づいて推論(予測)する統計的問題解決のプロセスを学校段階の非常に早期から，身近なデータによる認知的かつ経験的訓練を繰り返す方式の授業形態が取られている。具体的な身の回りのデータに親しみ，データの収集と分析を行い，結果を解釈しデータで議論するという統計的問題解決の一連のプロセスを繰り返し経験させることで，日常のアクションに統計の素養を持って対峙する習慣をつけ，ステップを踏んで統計活用力と不確実性を記述する確率的思考を実感を伴わせながら深めていくカリキュラムが実践されている。

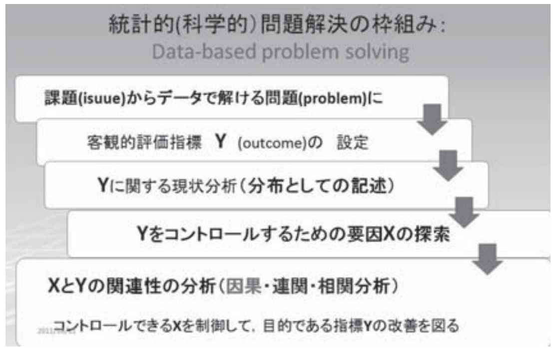
そこでは，例えば下の図のようなポスターを使って，まず全体の問題解決のフレームワークを先に学び，どの場面で何の統計の手法を用いればよいのかという点を学んでいる。図中のPPDAC：Problem→Plan→Data→Analysis→Conclusion は，カナダ・オーストラリア・ニュージーランドなどで，データに基づく科学的探究のプロセスとして知られているサイクルである。



データに基づく問題解決（*X*と*Y*で考える）からみた新課程における統計教育の系統性

企業等で行われているデータに基づく問題解決のプロセスは以下で表される。世界が指向する統計教

育は，まず下記の問題解決のプロセスの全体像を習得させ，それぞれのステップで必要となる統計グラフや統計量，その活用の仕方を分析の目的に沿って，具体的に理解させていく方法を取っている。



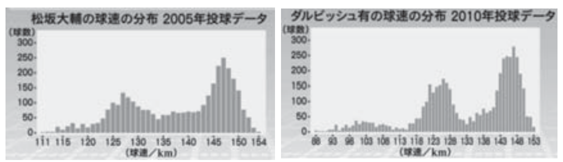
ステップ0：問題に対する客観的な指標 Y の設定

問題に対応した評価（目的）変数 Y を決め，客観的指標に基づく科学的・統計的議論が組織の意思決定では普通であることを理解させる。例えば，プロスポーツの場合，野球の相手投手の球速 Y やサッカーでまず１試合当たりの得点率 Y などの分布の実態を知らなければ，客観的な議論が始まらないことを理解させる。

ステップ1： Y の現状把握（マクロな視点を持つ）

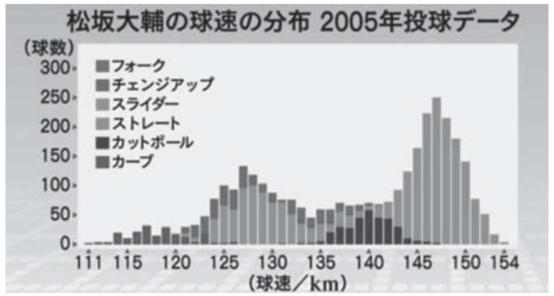
評価変数 Y は，個々にみても傾向がつかめない。全体のばらつきを概観する手段としての分布の重要性と有益性を確認させる。新課程の数学Ⅰでは主に，量的変数を対象としているので，ヒストグラムの形状の異なるものを見せながら分布の読み方を指導するとよい。

Ex.1　多峰性を示し，傾向を捉えるために分類の必要性を議論させるヒストグラム（球速）



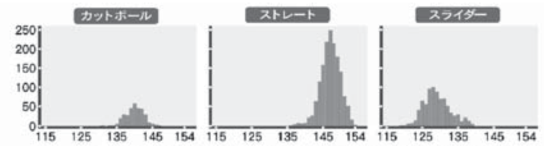
最大値，最小値の意味，平均値，中央値などが中心傾向を読み取る上で単独では意味をもたないこと，ばらつきの大きさの意味，ばらつき（データの変動）を説明する考え方（外的要因 X による変動なのか自然変動なのか），要因 X による分類でばらつきを小さくする（制御する）ことの意味，傾向がはっきりして予想がしやすくなるなどの理解が重要である。また，球速以外でもこのような形状の分布が起きる例を考えさせ，データ分析における分類の重要性をばらつきを小さくするという観点から理解させる。

Ex.2　適切な分類（球種別）によって単峰性の分布にできる例



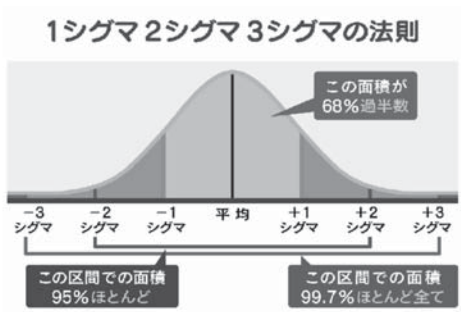
Ex.3　単峰で左右対称な分布の例

下図の球種別球速分布のように，単峰で左右対称形を示す分布は，誤差変動や同質集団の個体差などデータの自然変動を表す場合に多く見られる。

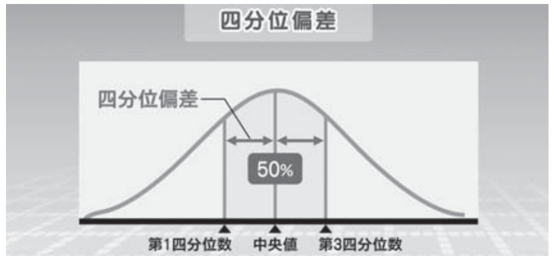


	データ(ケース)数	平均値(km)	中央値(km)	分　散	標準偏差(km)
ストレート	1560	147.1	147.0	7.916	2.813
カットボール	339	140.0	140.0	6.796	2.607
スライダー	814	129.1	129.0	14.054	3.749

このような分布の特徴は，平均を中心に±標準偏差で，データの中心3分の2をつかむデータの区間（中心傾向）が分かり，これをデータの傾向と考える（下記のシグマ（標準偏差）の法則参照）。



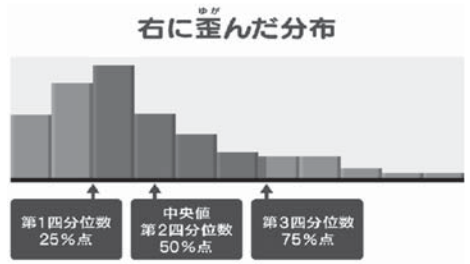
また，対称であれば中央値（平均とほぼ近い値）±四分位偏差で，データの半分(50％)をつかむ区間（中心傾向）を捉えることもできる。



ここで，標準偏差や四分位偏差が小さいほど，中心傾向を狭い区間で捉えることができ，予測やマネジメントの効率が高くなることを理解させる必要がある。

Ex.4　単峰で歪んでいる分布

単峰性を示しても左右対称にならずに+か−のどちらか一方の方向に歪む（裾をひく）分布を示す場合も現実には多い。その場合は，平均，標準偏差，四分位偏差の統計量は意味を持たなくなることを理解させ，中央値を含む四分位数による中心傾向のつかみ方や四分位数に最大値・最小値を加えた5数要約，四分位範囲による分布の傾向の読み方を指導する。



ステップ2： Y の分布を変化させる要因 X の探索
〜相関分析（因果・要因分析）〜

目的である評価指標 Y の現状を客観的に把握したのち，問題解決のストーリーを展開するためには， Y の分布を変化させる要因 X の探索が必要となる。 Y の上げ下げを要因 X を介して積極的にコントロールすることが，企業活動で言うところのカイゼンのストーリーである。例えば，売り場面積 X と売上 Y の相関が高ければ，売り場面積の拡大で売上の向上を計画できる。また，事故を起こすかどうかという事象 Y がゴールド免許を持っているかどうかという要因 X と関連があることが分かれば，自動車保険料をゴールド免許の有無で変える保険商品を企画できる。サッカーなどスポーツでも，得点 Y に結び付くプレー X を探し出せれば，チーム戦略が改善できる。

「データの分析」の内容である散布図や並列箱ひげ図の重要性はこのステップにあるので，是非，複数の要因候補が挙げられる課題で，探索の活動学習を体験させ，統計量やグラフの有用性を理解させてほしい。

また分析手法として， Y が質的変数か量的変数かによって，使用する手法の相違があることも意識させることが重要である。

- X（質的変数）× Y（質的変数）：
クロス集計表（行比率，列比率），条件付き確率
- X（質的変数）× Y（量的変数）：
層別ヒストグラム，グループ別度数折れ線グラフ，並列箱ひげ図
- X（量的変数）× Y（量的変数）：
散布図，相関関係，相関係数，相関以外の関係の見方

ステップ3：考察・発表・討論

観察や調査データに基づいて， Y の分布を変化させる複数の要因候補変数 X_1， X_2, ･･･， X_p と変数 Y の関係を分析し，変数 Y への影響が強い要因を探索する。ここで，因果と相関の違い，交絡，公平な比較のための変数変換や調整などの概念を理解する必要がある。また，テーマの説明，選択理由，探究プロセスの妥当性，残された課題，新しく生じた問題などを発表したり，討論したりする活動を指導することも大切である。

入試への対応

今回の学習指導要領の改訂にあたっては，社会で求められる学力の定義の見直しがなされている。これまでの知識=学力の構造ではなく，知識・思考力･判断力･表現力を総合して学力と捉えている。とくに，すべての教科で言語活動の重視が謳われており，数学も例外ではない。既に統計教育の分野では，国際的に，統計的リテラシー，統計的推論力，統計的思考力の3つの要素でバランスよくそ

8
Focus Gold 通信

の力量を評価する問題研究も進んでいる。OECDのPISAテストの「不確実性の数理」の問題などはその一端である。

試験問題開発の視点で上記の３要素を解説すると以下となる：

①統計的リテラシー

基本的な統計用語の定義や求め方を問う問題。

②統計的推論力

統計的概念を踏まえた理論的思考や統計情報の意味理解と簡単な解釈および複数の統計用語や概念間の対応関係を問う問題。

例えば，データ，度数分布表（相対度数，累積度数・・），ヒストグラム，累積折れ線グラフ，箱ひげ図，散布図，統計量，確率などの組み合わせを想定し，その関連付けが正しくできるかどうかの問題である。コンピュータでデータの分析を行うことが当たり前になっている現在，従来のデータを起点に統計量やグラフを直接計算させたり作成させる問題よりむしろ，データから出力される統計グラフや統計量同士の関連性や対応付けができるかどうかで，統計的な概念への理解の程度をみる問題が主流となっている。累積折れ線グラフの形状とヒストグラムや箱ひげ図の形状を対応付ける問題などは，分布自身をよく理解していないと簡単には解けないと思われる。

③統計的思考力

統計的考え方の理解や分析の結果の解釈，

統計的調査や実験がどのように行われるか，問題背景からデータの収集，分析方法まで仮説を検証するためのプロセスへの理解，

具体的な文脈を理解した上で諸種の統計指標の活用方法の理解を問う問題。

今回の改訂で，小学校1年から高校1年まで，毎学年で算数・数学の中に統計・確率的な内容が扱われており，また数学Bにも「統計的推測」が含まれた。冒頭で述べたように統計教育重視は時代の要請であり，センター試験で決して軽んじられる内容ではない。おそらく試作問題が発表されると思われる。また一般の大学入試にあっては，ほとんどの大学の多くの学部で統計の科目は開講され，さらにその素養が専門科目の教育と繋がることから重要視されている現状を考えると，これまで範囲外であったため出題されてこなかった統計の問題が，数学Ⅰの共通必履修内容に「データの分析」が入ったことから出題される方向に傾くことは容易に想像される。

最後に・・・

今年の8月24日の New York Times 紙に，冒頭でも紹介した数学者のデヴィット・マンフォード博士と数学教育の第一人者であるソル・ガーファンケル博士の連名による論説「アメリカの高校における数学教育をどう修正していくべきか」が掲載された。この中で，著名な2人の数学者は，抽象化に偏ったこれまでの高校数学教育の欠陥を指摘し，自然現象や経済・金融等の社会現象など，生徒が将来，身近に直面するであろう文脈と問題解決を取り入れた具体性のある数学教育を通して，科学的思考力と数学的思考力の双方が融合した不偏的数学力を身に付けさせる教育法への転換を進めることを提言している。

データに基づいて客観的に判断し，科学的に問題を解決する力は，将来，仕事や研究をする上での必須の力量である。「データの分析」の必修化は時代の要請として受けとめる必要がある。

渡辺 美智子 わたなべ みちこ

福岡市生まれ。九州大学大学院総合理工学研究科を修了。九州大学基礎情報学研究所を経て現在，東洋大学教授。専攻は統計科学。著書は「EMアルゴリズムと不完全データの諸問題」（多賀出版），「Excel徹底活用　統計データ分析」（秀和システム）など多数。趣味は韓国ドラマ。理学博士。

授業 実践記録

『数学・日々の復習』という指導法について

【岡山県】岡山白陵高等学校／三木 雅弘

はじめに

昨年，一昨年と二年続けて『フォーカスゴールド』執筆者の一人である竹内英人先生から愛知県内公立進学校間の情報交換会の様子をうかがうことができました。最も気になったのが「演習量を増やしているのにもかかわらず生徒の学力はなかなかつかない。量から質への転換は図れないものか」というものでした。

単に演習量を増やせば数学力がつくわけではないことは昔も今も変わりませんが，演習を通して理解を深め，大学入試に備えた力をつけようという一つの試みをご報告したいと思います。

「日々の復習」に至るまで

この約十年の間に難関大学志望者にも，数学における「基礎体力」が不足し，知的好奇心も低いまま，我慢して，がむしゃらに問題を解く練習を重ねる生徒が目立つようになりました。全ての分野で明らかに生徒間格差は拡大しました。いわゆる「ゆとり教育」の影響でしょうか，知識が単に不足しているだけならともかく，その理解もあやふや。基礎的な内容や単純な計算の段階では，以前ならば“常識”と考えていた「基礎訓練」も致命的に欠如している。ただ目の前の問題の『答え』を出すことに終始する。そんなスタートラインから育て上げる必要がある生徒も増えているのが実状です。

以前は，授業を進めていく段階では，週2，3枚，分野ごとの基本的考え方や計算技術の練習・確認を，「課題プリント」としてB5判のプリントによる添削指導で一人ひとりの学習状況がほぼ把握でき，次の授業や個別指導に役立てていました。少なくとも，学習状況が変わるとすぐに察知することができて，個別の指導や面談でのフォローだけでいい程度でした。弱いながらもコツコツ続けることによって生徒が伸びているうちは十分受験に間に合わせることも可能でした。

しかし，考えた跡を書き残すこともできず提出する生徒，自分一人で時間ばかりかけて，なかなか期限通りには提出できない生徒，そもそも『意欲』にまで問題が広がっている生徒。いろんな症状を抱える生徒にも対応しなければならない状況となりました。言わば空回りで，この方法の限界は明らかです。少しばかりの工夫や変更は効果があってもわずかで，それも一時的なものに過ぎませんでした。

そこで，学習状況の把握と一歩ずつの進歩を優先し，本質的な理解を問うような，できればやさしい，数少ない問題を選び，「やりっ放し」ではなく，そこからできるだけ多くのものを引き出させる方法へ転換を図るべきであると判断しました。この方法をまず入試演習からやってみました。

「日々の復習」の出発点と目的・方針

岡山白陵は中高一貫の私立学校で，中学3年生から高校数学に入るシステムになっています。中学3年生で数学IAに入るのですが，精神年齢的な面も含め，単純に「1年前倒し」というわけにはいきません。また，いわゆる「中だるみ」から『大学受験の基礎』の定着がなかなかうまくいきません。「ⅢCよりもIAの方がずっと難しい」のが実状です。基礎が曖昧なまま組み立てられた，極めて脆弱な数学力しかありません。

入試演習には，それまで実施していた教科書傍用問題集レベルの「課題プリント」の累積から，やさしいレベルでありながら単なる計算問題ではなく，定理や公式に至る「本質的」な考え方を問うような問題をできるだけ選びました。定理や公式そのものを証明することも敢えて入れました。IAⅡBの範囲で340題ほどになってしまいます。

できるだけ広い分野を，記憶が薄れない間に一通り，コツコツ続けるものとして，B5判のプリントに約

9
Focus Gold 通信

3題をほぼ毎日。相当大変なはずです。すべて「記述式」で，計算方法も書かせる。「暗算できないものは全て書き残す」がスローガンです。生徒の提出したプリントは必ずポイントだけでもすべて「添削」。「解答・解説」はできるだけこまめに「手書き」で，生徒が今復習しなければならないポイントを考え直せるようにします。

その際，生徒がおかした間違いや，「別解」も発想や観点だけでもできるだけ書くようにしています。生徒の思わぬ発想に驚かされることもあります。

今から9年前にこの様な方針で始め，『アドバンス』や『フォーカスゴールド』をはじめ，多くの問題集・参考書を参考にしながら，生徒の様子なども見て改訂し，今では第5版になっています。

利点

意外かも知れませんが，入試に備えた問題演習（の基本）では，以前に自分が解いた問題と全く同じものを用いる方がむしろよいと考えます。取り組む意味を理解し，意欲が保持されているという条件付きのことではありますが。

入試演習は，教科書レベルの学習過程での演習とは意味・役割は大きく異なります。限られた範囲内の決められた発想による必要はありません。限られたパターンの繰り返しは頭が固くなるだけでしょう。

数学の問題は好きなように解けばよいはずです。数学ⅠAⅡBの範囲の内容はほぼ終了している段階では，多面的な捉え方で，いくつかの解法が思い浮かぶ可能性がかなり高くなります。その中から最もふさわしいものを考えて選択すること。これこそが数学の理解には欠かすことができない，入試にも直結する方法ではないでしょうか。

『どんな解法が楽か，ふさわしいか』と考えることは，その問題の構造自体を捉えること，よく使われる“発想”がどんな意味を持っているか，にも踏み込むことになります。

入試に対する意識の高まりが，センター試験，二次試験の両方への対応策にもなっているといえば言い過ぎでしょうか？　後は受験大学の傾向（？）に合わせた粘り強い取り組みのみだと思います。

また，教科書等で学習してから時間が経過しているため忘れていることも多いという点も，逆に活かすことができると思います。

教育課程は，いつの時代も『最大多数』のためにできるだけ良いものをと考えて構成されます。発想は極めて素晴らしいのに，それを活かした教育実践となると逆に，極めて難しくなるのが常です。

入試のための演習では，指導要領上分断された“内容”を「再編」することも可能となります。というより，そのような『組み替え』た指導がどうしても必要ではないでしょうか？　また，高校数学から削除された内容は本当に知らなくて大学入試に対応できるのでしょうか？

復習ではない積極的な意味

『組み替え』たり，補充した方がよいと思われるいくつかの例を挙げます。

【例1】集合関連の考え方

現行の課程では集合の考え方も薄く，2次方程式の解は当初，実数解しか考えないことになっていることから，“解の判別”の意味が正しく理解されず，2次方程式に“解がない”という生徒もよく見掛けます。

また，図形が「点の集合」として捉えられないためにパラメーター表示の「動点の軌跡」という捉え方が難しいようです。これは入試では「数Ⅱ」としても十分出題できるものです。

この「集合」の発想は多くの分野にまたがっていることもあり，「補充」した方がよいのではないでしょうか？

【例2】恒等式の取り扱い

恒等式とは何なのか?の理解が浅くなっていないでしょうか?

等式を“いつ等号が成り立つか”で方程式と恒等式に分類することは基本に当たると思うのですが，なかなかそうはいかないようです。「方程式の解」に対する理解も当然曖昧になってしまいます。

【例3】ベクトルの利用

直線の方程式は，中学課程では $y=ax+b$ で始まり，一般形 $ax+by+c=0$ へと進みますが，いつまでも「傾き」頼みで（ $y=ax^2$ における a まで「傾き」という者も），『ベクトル』を使いこなすのが難しい。特に，『直交条件』は定義されるかどうかも分からない「傾きの積が -1」という発想に頼りがちです。

【例4】計算の工夫

筆記による試験では限られた時間内でどれだけ「解けるか」が問われるのが常です。

高度な計算技術はなくても，「整数計算」から拡がっていく「暗算」の練習はぜひ必要と思われます。何よりも「分数計算の回避」ができません。また，整式の割り算で商と余りを求める問題では，「割り算は実行しない」でも十分対応できます，もちろん逆演算として。他にも，数Ⅱの定積分での「数値計算」は項別積分の原則が使いこなせているでしょうか?

計算では単なる公式の適応だけでミス連発?

Σ等にも気になるところは数多くあります。

終わりに

私のこの様な試みは多くの方が行っておられるのではないでしょうか? 恥ずかしながら敢えてこのような駄文を書いてみました。少しでも興味・関心がおありでしたら，ご連絡いただければ幸いです。お互いの経験や知恵を交換できたらと思います。

［連絡先］m-miki@okahaku.ed.jp

三木 雅弘 みき まさひろ

兵庫県たつの市生まれ。京都大学理学部（主に物理学を専攻）を卒業。三木学園・岡山白陵中学校・高等学校数学科教諭。

授業 実践記録

参考書「Focus Gold」を問題集として使用してみて

【神奈川県】聖光学院中学・高等学校／中澤 剛

聖光学院は中学高校6年一貫校で，6年間を前期（中学1,2年），中期（中学3年,高校1年），後期（高校2,3年）と分けています。前期・中期までは1週間に6時間ずつ，後期からは文理分けが行われていて，文系では6時間ずつ，理系では高校2年で7時間，高校3年では11時間の数学の授業時間数があります。数学の授業時間数が多い学校のひとつであることを自覚し，量とともに，授業の質も高い学校を目指しています。

前期の2年間では中学3年間の内容を代数と幾何に分けて教え，中期の2年間では数学IAIIBを，後期の2年間では文系の生徒には数学IAIIBを繰り返し，理系の生徒には数学IIICと演習授業で，文系理系ともにどちらにしても繰り返し学習させ定着を図っています。6年間を複数の教員が教えることになりますので，偏りがないようにしっかりとしたシラバスを作り，教授内容に関しては教科書をミニマムスタンダードとしていて，教科書に載っている例題・練習・章末問題は必ずできるようにすることにより基礎学力の育成を目指しています。

教科書プラスアルファの部分に関しては，各教員がオリジナルのプリントを作っていて，その学年で学んでほしいことや，将来学ぶことへの種を蒔いていたり，数学に興味関心が湧くように心掛けています。

中学3年から高校課程の数学IAの内容に入り，来るべき大学受験への基礎力構築のための第一歩を踏み出し始めます。教科書+プリントで授業を進めていくのですが，授業内容の定着のために，副教材として問題集を生徒に取り組ませていて，参考書に関しては，実際に書店に行って学習参考書のコーナーにある参考書を自分の目で見て，自分に合う参考書を購入するように薦めています。

私が中学1年から持ち上がった51期生に対して，どの問題集を取り組ませればよいのか，どの参考書を推薦すべきかを考えたときに，次の2点に留意しました。

①自分1人で学ぶことができるようになること

聖光学院は生徒の面倒見がよい学校とされていますが，面倒見がよいということは手取り足取り何でもしてあげるということではなく，自分で進んで学ぶことができるようにしてあげることと考えています。問題を自分でどうすれば解くことができるのか，解法の指針は何でどこが重要なポイントなのかなど，自分でできるようになるための下準備を中学高校時代に習得させたいと思っています。

授業でいわれたことだけを表面的に理解するのではなく，自分で問題を解決するために必要なこと，間違えたことからいろいろなことを学ぶことこそが大切であると考えています。授業の内容を理解することは必須であり，授業で習ったことをわかったつもりではなく，より深い部分で理解するためには，自分でもう一度解いてみることが大切なのです。そのためには，精錬された問題と丁寧な解答解説がされていることが必要となってきます。

②大学受験まで繰り返し使えること

せっかく解いた問題も解きっぱなしでは意味がありません。繰り返して学習するのですから，自分が解いた問題をノートを見ながら振り返ることができるようなもの，それを土台にして大学入試問題に対応できる力が養成されるものを選びたいと考えました。

①を考えると問題集よりも参考書が適しているのではないかと思いました。ただ参考書はページ数が多いので，受験期に使うのであれば，辞書のように分からなかった問題を中心に見ることになりますが，中学3年の高校数学導入時から，授業と併用して参考書に取り組んでいけば，自分なりの参考書の使い方が出来上がっていくのではないかと思います。

啓林館の『フォーカスゴールド』は問題編と解答編が分かれていて，同じくらいの厚さで丁寧に書かれています。また，例題だけでも考え方，解（ポイント），まとめ（フォーカス），練習問題（類題）とあるので，授業で理解できなかった部分も参考書で繰り返し学ぶことができる利点があります。

②については『フォーカスゴールド』は，マスター編，チャレンジ編，実践編の3部構成になっていますので，中学3年から初めて学ぶ時には，マスター編を自学自習用に生徒に取り組ませ，高校2年・3年の演習授業にはチャレンジ編，実践編に取り組んでもよいし，典型的な問題が充実しているマスター編を繰り返してもよいので，この1冊ですべて事が足りてしまいます。また，マスター編の中でも，さらにチェック問題（C問題），例題，練習，ステップアップ問題（S問題），章末問題と分かれていますので，実力に応じて取り組ませるのもよいかもしれません。

中学3年・高校1年では数学が週に6時間あるとはいっても授業内ですべてをこなすことはできないので，授業内容の復習，教科書の問題から大学入試レベルの問題に対応できる力の定着という意味でも，押さえておきたい基本的な問題が例題として採用されていますので，まずはこのマスター編をしっかりと学習してもらうことが大切なのではないかと思います。

中期の中学3年・高校1年の2年間で『フォーカスゴールド数学I+A』，『フォーカスゴールド数学II+B』の2冊をマスターすることを目標に，中学3年時に2冊を渡しました。マスター編のチェック問題（C問題），例題，練習，ステップアップ問題（S問題），章末問題について定期試験前や長期の休みの後にフォーカスゴールド専用のノートを生徒に作らせ，自分で解いた解答と模範解答の解説を見比べながら，自分で添削させて提出させました。だいたい1か月ぐらいの期間で50題ぐらい問題を解いていくので，計画をしっかりと立てないと，そのしわ寄せが，提出期限ぎりぎりになってやってきたり，数学力の向上のための宿題ではなく，宿題を提出するための宿題になってしまった生徒もいるようでした。

生徒たちは，解答解説がすぐに見える例題は解かなくてもよいのではとか，簡単なチェック問題は解く必要がないとか，難しい章末問題は自力では解けないので答えを写すだけになっているとか，最初はいろいろと戸惑っていましたが，提出する回を重ねるごとに自分なりのポイントや感想などを書き込みながら，しだいに確かな数学力が身に付くような上手なノート作りを進めていました。

問題集と違って，見た目の厚みに驚いて，やる気を失せてしまいがちですが，数年間かけてこのボリュームを友達とともにこなしていこうと言うと，納得しながら取り組んでいました。解答だけではなく，考え方や図や表などより視覚に訴える丁寧な解答解説があることや，男子校なので控えめな色使いもよかったように思います。ノート作りがうまくいかない生徒には，週1回の補習や夏期講習の時に生徒とともに，『フォーカスゴールド』を使って一緒に解きながらノート作りを進めていったりもしました。

その結果，中学3年の1年間で『フォーカスゴールド数学I+A』のすべての問題と『フォーカスゴールド数学II+B』の問題の4分の1ぐらいを終えることができました。中学高校一貫校にとっては，中学3年という中だるみの時期にこそ逆に，将来への礎となるしっかりとした基礎学力を身につける習慣づけが大切であり，そのためには授業を中心として，自分でもう一度解き直してみる，類題を一から解いてみることにより本当の理解が得られます。そういった一つひとつの積み重ねが，確固たる数学力の養成につながります。未来の自分への投資のために，がんばってください。

中澤 剛 なかざわ つよし

東京都生まれ。東京農工大学大学院工学研究科修了。現在，聖光学院中学・高等学校数学科主任。趣味は教育と育児。

生徒の素朴な疑問に答えるために①
―私の数学質問ノートから―

【岐阜県】
佐々木学園 鶯谷中学・高等学校
副校長 小邑政明

はしがき

数年前，私のところに質問にきた生徒の素朴な疑問から，それに答えるために数学教師として押さえておきたい事項を一つひとつ書きとめる試みが始まった。

「座標平面における直線の方程式は，$y-y_0=m(x-x_0)$ と $ax+by+c=0$ の2種類の表し方があるのはなぜですか。どちらか一方だけでもよいと思うのですが」。

覚えることを少しでも減らしたい生徒の気持ちからすれば当然かもしれない。もっとも，内容を整理系統化して，記憶することを少なくする工夫は数学では大切なことである。その生徒には一日の猶予をもらって次の日回答することにした。

ここでは簡単な説明とするが，m も (a,b) も直線の向きに関わっていて m は平行方向により，(a,b) は垂直方向から向きを制御している。考える場が座標平面から座標空間になったとき，前者は直線の式に，後者は平面の式に発展していくことを述べ，次元の視点から考えれば，座標平面では $1=2-1$ であるが，座標空間では $1\neq 3-1$ であるとまとめた。

そして最後に，「物が存在する場が広がれば，今まで同じように見えていたものもその違いがはっきりしてくることがよくある。よって，広い視野をもつことも問題解決にとって重要だ」と人生訓も付け加えた。単に数学を教えるだけでなく，数学を通してものの見方や考え方を教えることが私の仕事だと思っている。スッキリとした笑顔で帰っていく生徒の姿が私の新たなエネルギー源になる。

それ以来，いろいろな疑問をもってくる生徒が増えた。ときには若い先生からもいただいた。

「四平方の定理（四面体の側面積の関係）」，「 $\sum_{k=1}^{n}k^2$，$\sum_{k=1}^{n}k^3$，… を簡単に導く方法」，「n次元球の体積を求める方法」等々，そのたび時間をもらって考えたり専門書で勉強したりして回答していった。ひと月近くかかった問題もあった。おかげでずいぶん勉強させてもらった。

私のバックグラウンドとなっているこれまで蓄えてきた知識や資料のうちから，いくつかを何回かにわたってご紹介したい。はたして生徒の疑問に答えるための大きな力となりうる内容か心配だが，ご指摘やご意見をいただくことでより良いものにしていくことができれば，さらには新しい情報をいただければと思う。貴重な機会をあたえていただいた啓林館の山口氏をはじめ編集部の皆さんに感謝する。

私は常に「先生の先生は生徒である」ということを大切にして指導に当たっているが，今，あらためて，この言葉を深く心にとどめておきたいと思っている。

小邑 政明 こむら ただあき
岐阜県飛騨市生まれ。名古屋大学理学部数学科卒業。
高校教諭，岐阜県教育委員会指導主事，岐阜県立高校長（岐阜県高数研会長）を経て現在に至る。趣味は，全国温泉巡り。

Q 素数は無限にあるのですか。また，自然数の中でどのように分布していますか。

解説

(1) Euclidの幾何学原本の中に，素数は無限個あることの証明が載っている。<「初等整数論講義」高木貞治著，共立出版，p. 20参照>
また，素数の分布については，

(2)「Dirichletの素数定理」
初項 a と公差 d とが互いに素な自然数である等差数列の項の中には，無限に素数がある。<「数論Ⅰ」黒川信重他著，岩波書店，p. 269参照>

(3)「Hadamardの素数定理」
$\pi(x)$ を x 以下の素数の個数とすると，
$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log_e x}}=1$ が成立する。
<「数論Ⅰ」p. 265参照>

(4)「Tschebyschefの定理」
$x>1$ となる自然数について，x と $2x$ との間には必ず素数がある。<「初等整数論講義」p. 23参照>
（応用問題）
「1 から $2x$ までの自然数を x 個ずつ2つの組に分けて，それぞれの組の x 個の数を掛け合わせて2つの数を作るとき，どのような分け方をしてもこの2つの数が等しくなることはない」を証明せよ。

(5)「Goldbachの推測」
2以外の偶数は，2つの素数の和として表すことができる。<未解決>

(6)「類体論的現象」
奇素数 p について，$p=x^2+y^2$ となる自然数 x，y が存在する。 ⇔ p を4で割った余りは1である。<「数論Ⅰ」p.140参照>
〈応用例〉
自然数 m，n に関して，次の2つの命題の真偽は，上記の現象の差である。
「m^2+n^2 が3の倍数なら，m，n はともに3の倍数である」（真）
「m^2+n^2 が5の倍数なら，m，n はともに5の倍数である」（偽）

Q 分数を循環小数で表したとき，循環の一節には何らかの規則性がありますか。

解説

既約な真分数 $\frac{m}{n}$ で，分母 n が2および5で割り切れないものを考える。次の定理が成り立つ。

$\frac{m}{n}$ を循環小数に展開したときの循環の一節の数字を e 桁とすれば e は 10^e-1 が n で割り切れる最小の自然数である。また e は $\phi(n)$（1～n なる自然数で n と互いに素である自然数の個数を表す）の約数で，それは分母 n のみによって定まる。<「初等整数論講義」p. 58>

（例1）$n=7$ とする。

7の剰余系で考える。$10^0\equiv1$，$10\equiv3$，
$10^2\equiv2$，$10^3\equiv6$，$10^4\equiv4$，$10^5\equiv5$，$10^6\equiv1$

よって，$e=6$ である。さらに，分子をこの順に，1，3，2，6，4，5 とすると，

$\frac{1}{7}=0.142857$，$\frac{3}{7}=0.428571$，$\frac{2}{7}=0.285714$，
$\frac{6}{7}=0.857142$，$\frac{4}{7}=0.571428$，$\frac{5}{7}=0.714285$

（いずれも右辺は循環の一節のみを記述している）

これをよく眺めてみると，循環の一節の数字が右から左にスクロールしていることがわかる。

（例2）$n=13$ とする。

13の剰余系で考える。$10^0\equiv1$，$10^1\equiv10$，
$10^2\equiv9$，$10^3\equiv12$，$10^4\equiv3$，$10^5\equiv4$，$10^6\equiv1$

よって，$e=6$ である。

$\frac{1}{13}=0.076923$，より例1と同じように

$\frac{10}{13}$，$\frac{9}{13}$，$\frac{12}{13}$，$\frac{3}{13}$，$\frac{4}{13}$ は，循環の一節の数字をスクロールしていけば順次求まっていく。

さらに，この中にない分子については，

$\frac{2}{13}$ の循環の一節は，$076923\times2=153846$ で与えられ，
$2\cdot10\equiv7$，$2\cdot10^2\equiv5$，$2\cdot10^3\equiv11$，
$2\cdot10^4\equiv6$，$2\cdot10^5\equiv8$ より，

$\frac{2}{13}=0.153846$，$\frac{7}{13}=0.538461$，$\frac{5}{13}=0.384615$，
$\frac{11}{13}=0.846153$，$\frac{6}{13}=0.461538$，$\frac{8}{13}=0.615384$

が得られる。