Focus Communication

考えて出会う、本当の数学。

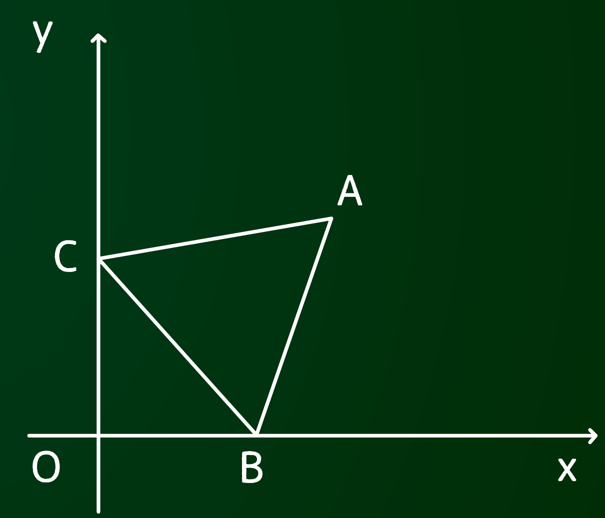
数学を楽しむ情報誌 | Information magazine for mathematics | 啓林館

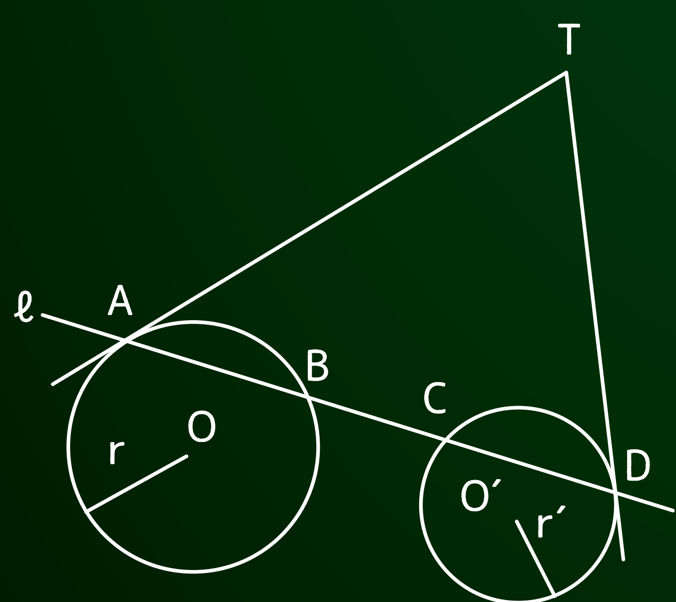
2020 Spring 春号

For teachers & students

生徒のみなさんへ
この問題，解けますか？

今，xy平面上の$x>0$，$y>0$の領域に定点Aがある。
また，x軸上（$x>0$）を点B，
y軸上（$y>0$）を点Cが動くとき，
$AB^2+BC^2+CA^2$の最小値を求めよ。





先生方へ
この問題，どうやって指導しますか？

半径r，r'の2つの円O，O′がある。
O，O′と定点A，B，C，Dで交わる直線をℓとする。
円Oの点Aにおける接線と，
円O′の点Dにおける接線の交点をTとする。
$AB=CD$のとき，AT：DTをr，r'を用いて表せ。

Table of contents

これからの中高一貫校教材について

数学を通して生徒に身につけてほしいものとは？
これからの中高一貫校教材について，学校現場の先生方の声をまとめました。

数学における思考力とは？

Q

新しい学習指導要領（中学校：2021 年施行，高等学校 2022 年施行）では，思考力・判断力・表現力といった数学的思考がより重視される内容となりますが，数学における思考力とはなんでしょうか？

先生方からのご意見は・・・

自分が学生だったころを振り返って，当時「できる子」だった同級生のイメージを引きずっていたり，数学者を育てるということを最終目標に置いていたりと，教員間でもなかなか意思疎通はできていない。**少なくとも校内では思考力とは何かについて方向性を統一しておく必要がある。**

問題集をただ解いているだけでは，**「問題が解けること＝力がついた」と勘違いしてしまうことがある。**問題が解けても説明はできない，ということは多い。**何のために，何を目的において問題演習をさせているかという意識を常に持つ**ことが必要。

学問として数学を学ぶときの楽しさ。**数学の勉強は入試がゴールではない**し，これは他教科に関しても言えること。

授業での取り組みは？

Q

授業の中での取り組みについて，気を付けていることや工夫していることはなんでしょうか？

先生方からのご意見は・・・

生徒が受け身ではなく，**「参加している」という意識を持つことが重要。**そのためには，新しいことを生徒自身に発見させるという体験がよい。授業では，生徒が見つけたことを教師が知らないふりをして取り上げ，**「詳しく説明してみて」「本当にそれは成り立つの？」などの問いかけ**をして展開させていくような活動を行っている。これで，表現力も養うことができる。

教師は生徒に教えたがる人が多い。生徒の思考のスピードに合わせた授業を行うのは大変だが，それを我慢してとことん付き合っていくことが必要。**教師が知っていることでも，生徒にとっては初めての発見である。**

期末試験が終わってから，面白かった解答を授業で取り上げて深めていくことがある。生徒の実名を出して紹介することも。整数分野で不定方程式の問題を出すと，想定外の解法など興味深い答えが多く自分も楽しかった。中高一貫校は，公立中学よりも時間のゆとりがあるため，**振り返る活動を多くとることができる。**

四角形の合同条件を扱った。合同条件がいくつあるかというゴールだけ生徒に示し，自由に考えさせたところ，自分でも自信をもって正誤を判定できないような意見も出てきた。**生徒同士の掛け合いで，思いがけず授業が面白くなることがある。**

相似を学習した直後で，直角三角形の斜辺を求めさせるという研究授業を見た。**授業の最後まで三平方の定理を与えず，すべて生徒に導かせるという授業のスタイル**があるのかと驚いた。そのような余裕をもって授業ができればと思う。

大学生になり，卒論を書くタイミングになって初めて，「勉強って面白い」と思う人がしばしばいる。そこで気づくのはもったいない。できれば中高生の間に，**自分で問いを立てて学ぶ，発見する楽しさを知ってほしい。**

学習意欲を上げるためには？

Q

生徒の学習意欲を上げるために工夫していることはなんでしょうか？

先生方からのご意見は・・・

思考力・判断力・表現力を育てるには，まずは土台となる最低限の知識・技能が必要となってくる。しかし，**まずは「おもしろい」という気持ちが先行してあるべき。**面白い，楽しいから知りたくなる，理解したくなるという流れが授業で作れるとよい。

基礎を完璧にしてから応用へ入ると謳う指導もあるが，実際そのような指導は難しいと思う。基礎と応用は，行き来しながら双方一体となって力をつけていくべきものだし，**基礎力を身につけていく過程で当然応用力も育っていくようにせねばならない。**基礎的な知識・技能を用いて応用問題を考えることで基礎のよさに気づくこともある。**毎度の授業で「面白い」ネタを用意するのは大変だが，このような活動をすることで，生徒が自らおもしろい課題を見つけてくることにも繋がる。**

2020年秋　Focusシリーズがますます充実！
Focus Gold Junior・システム数学3rd Edition 発刊

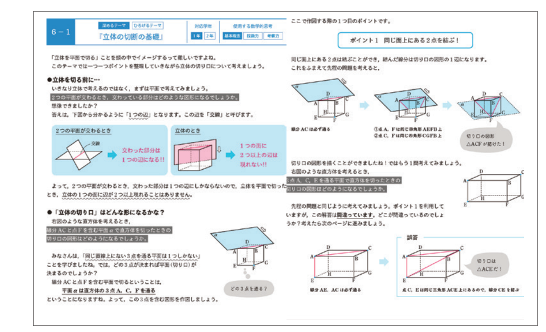
NEW!

Focus Gold Junior 3つの特徴

01 「考え方」と「背景」数学の本質にフォーカスした内容

02 中高一貫教材“システム数学”とのリンク

03 生徒が思考しながら読む紙面構成



仕　様
サイズ：B5変形判
ページ数：320ページ
3色刷り

定　価
1,650円（本体1,500円）

発刊時期
2020年冬

使用想定時期と用途

1.中学校入学時（中１～）
- ●学校で使用しているテキストと併用
- ●夏休みなどの長期休暇で探究的に使用

2.中学数学を学び終えた段階（中２～）、
高校入学前（中３卒業後春休み）
- ●中学数学の知識の整理と高校数学への思考の変化を身につける

教科書？問題集？参考書？
今までになかった，
数学を**読**んで**学**ぶ本「**読学書**」が登場！

●問題を「解くだけでは身につかない」学力
●数学に興味をもって「自ら学ぶ」姿勢
これらを身につけるならこの１冊！

こんな本が欲しかった！

文章は「発問・対話形式」で書かれているので，
思考力・読解力の養成 に繋がります。

Focusシリーズ教材ラインナップ

システム数学 3rd Edition　テキスト　問題集　2020年冬発刊

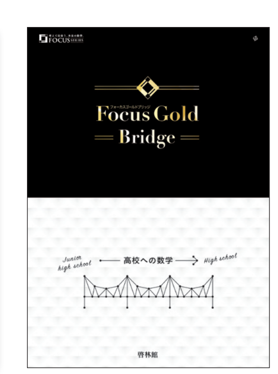
入試対策

システム数学
入試必修問題集
実戦 3rd Edition
錬磨 4th Edition

読学書

読んで学ぶ数学の本質
Focus Gold Junior

入門



高校への数学
Focus Gold Bridge

参考書　Focus Gold
Focus Z

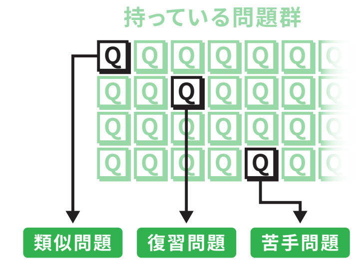
大学入学共通テスト
対応問題集
数学Ⅰ・A・Ⅱ・B

ICT（デジタル）とこれまでの勉強方法（アナログ）の理想的な融合を目指して考え抜かれたデジタル問題集です。
紙のノートとペンを使った従来の勉強方法の優れた部分を残しながら，ICTのフル活用により
「問題の検索」「苦手分野の分析」などを可能にし，生徒がより効率的に学習できるようサポートします。

Libryの使い方

生徒一人ひとりに合わせて
最適な問題をレコメンド！

- 解いた問題の **類似問題**
- 記憶を定着させる **復習問題**
- 弱点補強に役立つ **苦手問題**



トライアル実施中！

詳細はコチラ

対応教材

改訂・新刊商品

※発刊商品・内容については制作途中のため変更になる可能性がございます。

問題集	○ システム数学１ 代数編 3rd Edition（テキスト/問題集） ○ システム数学２ 代数編 3rd Edition（テキスト/問題集） ○システム数学３ 数学Ⅰ･A･Ⅱ編 3rd Edition（テキスト/問題集）	○システム数学１ 幾何・統計編 3rd Edition（テキスト/問題集） ○システム数学２ 幾何・統計編 3rd Edition（テキスト/問題集） ○入試必修問題集 練磨 4th Edition（ⅠⅡAB/Ⅲ）

既刊商品

教科書	○ 詳説数学 改訂版（Ⅰ+A／Ⅱ+B／Ⅲ） ○ 新編数学 改訂版（Ⅰ+A／Ⅱ+B／Ⅲ）	○ 数学 改訂版（Ⅰ+A／Ⅱ+B／Ⅲ）
問題集	○ アドバンスプラス 改訂版（Ⅰ+A／Ⅱ+B／Ⅲ） ○ マスグレード 改訂版（Ⅰ+A／Ⅱ+B／Ⅲ） ○ アベレージ 改訂版（Ⅰ+A／Ⅱ+B／Ⅲ） ○ 入試必修問題集 実戦 3rd Edition（ⅠⅡAB／Ⅲ） ○ システム数学１ 代数編（テキスト/問題集） ○ システム数学２ 代数編（テキスト/問題集）	○ アドバンス 改訂版（Ⅰ+A／Ⅱ+B／Ⅲ） ○ エスコート 改訂版（Ⅰ+A／Ⅱ+B／Ⅲ） ○ 入試必修問題集 練磨 3rd Edition（ⅠⅡAB／Ⅲ） ○ システム数学１ 幾何・統計編（テキスト/問題集） ○ システム数学２ 幾何・統計編（テキスト/問題集）
参考書	○ Focus Gold 4th Edition（Ⅰ+A／Ⅱ+B／Ⅲ）	○ Focus Z（Ⅰ+A／Ⅱ+B／Ⅲ）

啓林館 新興出版社 文研出版の教科書・問題集・参考書が

動画授業で学び放題・見放題！

スマートレクチャー

STEP 01 まずは会員登録から！
有料会員なら
全部の動画授業が見放題！

STEP 02 無料の専用プレーヤーをインストールしよう。
専用プレーヤーを使えば
いつでもどこでも学習できます。

STEP 03 動画授業をダウンロードして学習の準備完了！
学びたい書籍の動画授業をダウンロードして
学習を進めよう！

詳細はコチラ

数学のセミナーを実施しました。

2020年2月に高校数学教員など,数学に携わっている方を対象にセミナーを実施しました。
今回はその中から2月11日,15日のセミナーの内容の一部をご紹介します。

求められる数学力育成のために
日々の授業実践より

東京学芸大学附属高等学校
荻原洋介先生

東京学芸大学附属高等学校の
荻原洋介先生には，
次のテーマでご講演いただきました。

【授業準備のポイント】
★「具体→抽象」，「抽象→具体」という
2つの流れをバランスよく考えることが重要
★易しい問題は深く，難しい問題はシンプルに
★単元の中で，ゴールとストーリーを決めておく

以上を踏まえて，実際に荻原先生が数学Ⅱ「軌跡と領域」分野で
使われている問題がこちら。

1. 2点A(4, 0), B(0, 2)に対して，条件 AP＝BP を満たす点Pの軌跡を求めよ。
2. 点Qが円 $x^2+y^2=4$ ……①の周上を動くとき点A(8, 0)と点Qとを結ぶ線分AQの中点Pの軌跡を求めよ。
3. 次の連立不等式を表す領域を D とする。点P(x, y)がこの領域 D 内を動くとき，$x+y$ の最大値と最小値を求めよ。
   $x+2y \leqq 8,\quad 3x+y \leqq t,\quad x \geqq 0,\quad y \geqq 0$
4. t が $t \geqq 0$ を満たしながら動くとき，
   $tx-y+t=0$ ……①
   $x+ty-1=0$ ……②
   を満足する点P(x, y)の軌跡を求めよ。
5. 点(x, y)が，原点を中心とする半径1の円の内部を動くとき，点$(x+y, xy)$の動く範囲を図示せよ。
6. $\dfrac{x-1}{x^2+3}$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

この6問を用いて，先生方はどのように指導しますか？

遊歴算家版 授業力をみがく
遊歴算家の授業実践報告

覆面の貴講師 数理哲人先生

覆面の貴講師 数理哲人先生には，
「最後の」センター試験を振り返って，
来年からの大学入学共通テスト
（新テスト）に向けた
お話をいただきました。

★《定量的》→《定性的》
計算力に偏る《定量的》な問題より，
きちんと理解していれば計算するまでもなく
分かる《定性的》な問題が確実に増える。
全てが定性的な問題に置き換わる
わけではないが，それを意識した指導を
していく必要がある。

★いつから取り組む？
目先の試験を乗り切るための問題の解き方を
教え続けると，間違った勉強法の矯正は非常
に労力がかかる。高校1年生など，早いうち
からじっくり取り組んでいくべき。

★定期テストのやり方は？
定量的な出題が多くなりがちだが，それができたからと言って数学ができるとは言えない。
高校1年生から，3割くらいは定性的な問題を
取り入れたい。生徒にどのような力を付けさせたいかを考えて作問するとよい。

授業力をみがく
今後生徒に求められる数学力の育成

名城大学 竹内英人先生

名城大学の竹内英人先生には，
新テスト対策と正しい
教科書の学び方について
ご講演いただきました。

【新テストについて】
新テストは，本質＝「なぜそうなるのか？」を真に理解していないと
太刀打ちできない問題が出される。
このような問題は，教員側が深く指導をしきれていなかった問題でもある。
つまり，新テストは先生方の授業力への挑戦状だと言える。

そのためには……
★量ではなく，質にこだわった授業
★教科書をじっくりとしゃぶり尽くすように進める
★「How？重視」から「Why？重視」へ

例えば，
・線形計画法の意味が分かっているか？なぜ $x+y=k$ とおくのか？
・因数分解の方法だけではなく，そもそもなぜ因数分解が大事か，
が伝えられているか

瞬殺数学って何？

瞬殺数学とは

もともとは, 2019 年度入試の大学入試センター試験の前に, センター試験対策のトレーニング問題として, SNS 上にアップしたのがきっかけでした。数学は本来じっくり考える学問です。しかし, センター試験では, 客観式（マーク方式）ということもあり, 限られた制限時間内で, 問題の意味を理解し, 計算を間違えずに解いていかなければいけません。

一つ一つの問題に多くの時間をかけることは出来ず, 問題を見たと同時に, 「あの解法で解けばよい！」と瞬時に頭に思いつく力も必要です。

このように, センター試験対策の一環として始めた「瞬殺数学」なので, センター試験の終了と同時に SNS へのアップをやめたのですが, 想像以上に多くの先生方が, 「瞬殺数学」を楽しみにしていてくださり, 中には, 「毎日, 朝の通勤時間の楽しみにしていたのでやめないでください！」という瞬殺ロス（笑）のメッセージをいただくこともありました。

それなら, もう少し続けてみようと思い, 幸い, 見てくださる多くの方が, 高校現場, 塾・予備校の数学の先生だったので, 単にセンター試験対策という意味合いだけではなく, その問題を通して, 「どのように指導するか？」というメッセージを問題に込めました。

つまり, 単に問題を解くだけで無く, 「出題者の立場」としての「作問の背景を読み取ってもらう」ということに主眼を置くようになりました。

そこから, 2019 年 3 月 10 日から 2019 年 10 月 22 日の間に, SNS 上に 50 題の問題をアップしました。そして, この「瞬殺数学」を通じ, 全国の先生方と SNS を通して交流を行うと共に, 東京, 兵庫, 名古屋, 福岡と, 全国各地で, 「瞬殺数学の会」を開き, 多くの先生方と, 数学の問題を囲み, 作問の仕方や授業の持ち方などを語り合うことができました。

「瞬殺数学」と聞くと, 「ただ速く解けばよい」, 「テクニック重視」等と思われがちですが, 実際には, 「その問題の背景（本質）を見抜くことによって, 問題の見方, とらえ方が大きく変わる」ということが重要で, 決して「小手先のテクニック」だけの問題ではありません。実際に, 毎回寄せていただいたく SNS へのコメントの中には, 「瞬殺数学の問題を毎日考えることによって, 問題の見方が大きく変わりました。」といったコメントもよく目にしました。

2022 年には, 新しい学習指導要領のもとで, 学力の要素の一つとして, 「思考力・判断力・表現力」が求められるようになります。

そうした中, 生徒に真の数学力を身につけてもらうために, 私たちはこれまで以上に, 深く教材研究をすることで, 「何を教えるか？」以上に, 「どう教えるか？」, 「どんな力を身につけさせたいのか？」について, より考えていかなければなりません。

今後も「瞬殺数学」を通して, 数学の楽しさを伝えていくことができればと思います。

竹内 英人

瞬殺数学の問題あれこれ

問題 1　瞬殺数学第 1 号はこの問題！
2019 年 3 月 10 日に作問

第 1 問

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$（a,b,c は実数）が虚数解をもつとする。$2b^2-4a^2-c^2-2ab+bc-5ca$ の符号は？

二次方程式の解の判別は？と来れば、「判別式」ですが、その方法だと、少し手が止まるかもしれません。「二次方程式が虚数解を持つとは、定性的にどういうことなのか？」を考えてみることが大事です。

問題 2　制限時間を設定することも
2019 年 4 月 6 日に作問

第 16 問（10 秒）

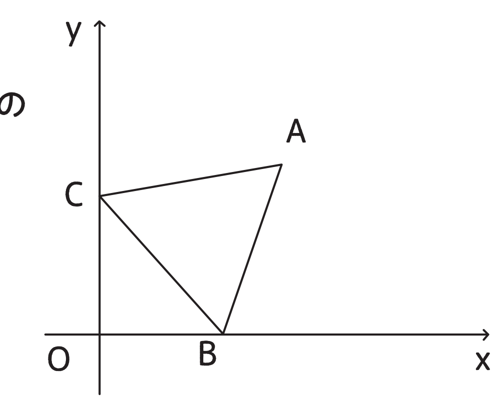
放物線 $y=x^2$ が傾き 3 の直線から線分 AB を切り取る。線分の長さが $2\sqrt{10}$ のとき，A，B の x 座標をそれぞれ求めよ。

普通なら、2 点の座標をそれぞれ文字で、$(\alpha、\alpha^2)$、$(\beta、\beta^2)$ と表し、α、βを用いて、AB の傾き＝3、$AB=2\sqrt{10}$ の式を作り、α、βを求める、という手順が普通だと思いますが、放物線のある性質に注目をすると、瞬殺できます！

瞬殺数学に挑戦してみよう！

For Students

今，xy平面上の$x>0$，$y>0$の領域に定点Aがある。また，x軸上（$x>0$）を点B，y軸上（$y>0$）を点Cが動くとき，$AB^2+BC^2+CA^2$の最小値を求めよ。



この問題は様々な考え方が出来る問題です。
解答例では
［考え方 1］座標を用いて考える方法
［考え方 2］中線定理を用いる方法
［考え方 3］コーシー・シュワルツの不等式を用いる方法
を挙げました。
このようにいろいろな見方をすることによって、瞬殺のアイテムが増えます。

【考え方１】　「座標設定」をして，ひたすら計算。

A$(a,\ b)$，B$(p,\ 0)$，C$(0,\ q)$とおくと，

$$AB^2+BC^2+CA^2=\frac{3}{2}(a^2+b^2)+2\left\{\left(p-\frac{a}{2}\right)^2+\left(q-\frac{b}{2}\right)^2\right\}\geqq\frac{3}{2}(a^2+b^2)$$

【考え方２】　辺の 2 乗の和から連想するものは？

$$AB^2+BC^2+CA^2=AB^2+OB^2+OC^2+CA^2=2(OM^2+BM^2)+2(OM^2+CM^2)$$
$$\geqq 4OM^2+2(B'M^2+C'M^2)=6OM^2$$

ただし，M は OA の中点，B′，C′は M から x 軸，y 軸へ下ろした垂線の足

【考え方３】

A から x 軸へ下ろした垂線の足を H，y 軸へ下ろした垂線の足を K とする。

$AB^2+BC^2+CA^2$が最小になるとき，B は H よりも左側，C は K よりも下側にあることは明らかであるから，

$$\begin{aligned}AB^2+BC^2+CA^2&=(AH^2+BH^2)+(OB^2+OC^2)+(AK^2+CK^2)\\&=(AH^2+AK^2)+(OB^2+BH^2)+(OC^2+CK^2)\\&=OA^2+(OC^2+BH^2)+(OC^2+CK^2)\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

ここで，コーシー・シュワルツの不等式より，

$$(1^2+1^2)(OB^2+BH^2)\geqq(1\cdot OB+1\cdot BH)^2=OH^2\text{（定数）}$$

等号は，OB：BH＝1：1，つまり B が OH の中点のとき

したがって，　$OB^2+BH^2\geqq\dfrac{OH^2}{2}\cdots\cdots②$

同様に，$(1^2+1^2)(OC^2+CK^2)\geqq(1\cdot CB+1\cdot CK)^2=OK^2$(定数)

等号は，OC：CK＝1：1，つまり C が OK の中点のとき

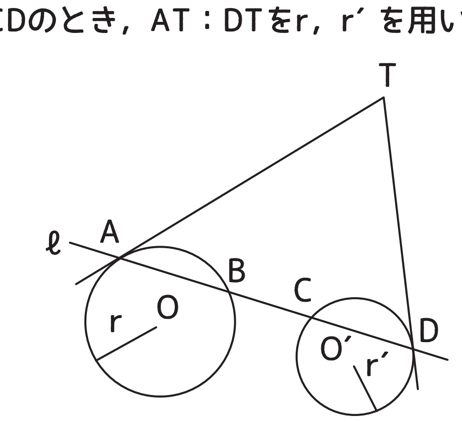
したがって，　$OC^2+CK^2\geqq\dfrac{OK^2}{2}\quad\cdots\cdots③$

①，②，③より，　$AB^2+BC^2+CA^2\geqq\dfrac{3}{2}OA^2$

瞬殺！

For Teachers

半径r，r′の2つの円O，O′がある。
O，O′と定点A，B，C，Dで交わる直線をℓとする。
円Oの点Aにおける接線と，
円O′の点Dにおける接線の交点をTとする。
AB=CDのとき，AT：DTをr，r′を用いて表せ。



【解答】

O，O′から下ろした垂線の足を H，K とする。

また，∠TAB＝α，∠TDC＝βとおくと，

∠AOH＝α，∠DO′K＝βより，

$$\sin\alpha=\frac{AH}{OA}=\frac{\frac{AB}{2}}{r}=\frac{AB}{2r},\quad \sin\beta=\frac{DK}{O'D}=\frac{\frac{CD}{2}}{r}=\frac{CD}{2r}$$

また，△TAD で正弦定理より，$\dfrac{TD}{\sin\alpha}=\dfrac{TA}{\sin\beta}$

したがって，AT：DT=$\sin\beta$：$\sin\alpha$ より，

$$AT:DT=\frac{CD}{2r'}:\frac{AB}{2r}=r:r'\ (\because AB=CD)$$

よって，AT：DT＝$r:r'$

瞬殺！

この問題は、なかなかの難問だと思います。
だからこそ、瞬殺した時の爽快感、感動は格別だと思います。
この問題の作問の背景は、「円周角の定理」と「接弦定理」を組み合わせた高校入試用の問題を考えていたところ、もう一つ、高校数学のある定理を組み合わせたら面白いのではないかと思い、作成しました。
この問題は、答えがきれいになるように設定していますが、一般的な問題への拡張が出来るところが面白いと思います。

指導力・授業力をアップさせ，授業スタイルの幅を広げてみませんか？

「これまでの高校数学の授業のよさ」と
「これからの高校数学に必要なこと」をまとめた１冊

B5 判・1 色刷

授業力をみがく
－高校数学編－

256 頁　定価 3,850 円（本体 3,500 円）

point 1　授業の組み立て方や考え方を **Q&A 方式**で解説

point 2　高校数学の内容について生徒がもつ疑問を中心に解説

シチュエーションによって使い分けられる２部構成

第１部　授業の組み立て方

- 授業前，授業中，授業の後といったさまざまなシチュエーション（25項目）で授業を組み立てるための考え方やコツを解説。
- 実際に起こりうる場面を，経験の浅い先生と経験豊富な先生の会話で再現。「自分だったらどうするか」を考えながら読み進めていくことができる展開。

第２部　数学の内容の指導について

- 生徒がつまずきやすい内容，生徒に理解・定着させにくい内容を中心に50項目の内容で構成。
- 導入から応用まで，どこにポイントをおいて指導するかなど，指導者側の視点にたった内容解説。

「授業力をみがく」シリーズは，啓林館 WEB ショップでご購入いただけます。
小中高と取り揃えていますので，ぜひご検討ください。

http://keirin.shop29.makeshop.jp/smartphone/

Focus series SNS始めます。　2020年6月開始予定

生徒のみなさまの学習を支援する情報をお届けします。　Instagram　#FocusGold数学

知が啓く。
啓林館
https://www.shinko-keirin.co.jp/
202006 内容解説資料

本社	〒543-0052	大阪市天王寺区大道4丁目3番25号	電話 (06) 6779-1531
東京支社	〒113-0023	東京都文京区向丘2丁目3番10号	電話 (03) 3814-2151
北海道支社	〒060-0062	札幌市中央区南二条西9丁目1番2号サンケン札幌ビル1階	電話 (011) 271-2022
東海支社	〒460-0002	名古屋市中区丸の内1丁目15番20号ie丸の内ビルディング1階	電話 (052) 231-0125
広島支社	〒732-0052	広島市東区光町1丁目7番11号広島ＣＤビル5階	電話 (082) 261-7246
九州支社	〒810-0022	福岡市中央区薬院1丁目5番6号ハイヒルズビル5階	電話 (092) 725-6677

啓林館HPはコチラ