Focus Communication

考えて出会う、本当の数学。

数学を楽しむ情報誌 ｜ Information magazine for mathematics

For
teachers & students

Table of contents

啓林館HPは
コチラ

2020
Vol. 2

啓林館

これから 20 年の高校数学

京都大学教授　藤原耕二

数学の研究とは

数年に一度，数学の難問が解決されたことが新聞で話題になることがあります。もう 20 年近く前になりますが，ロシア人数学者による「ポアンカレ予想」の解決が大きく報じられ，テレビで特集番組まで作られました。その前には，「フェルマの定理」の解決，また最近では，「ABC 予想」の解決，これは日本人数学者によるものでしたから，耳にする機会があったのではないでしょうか。アメリカのクレイ研究所という数学の研究所では，21 世紀のはじめ，7 つの数学の難問を選び，それを解決した研究者に，それぞれ百万ドル（約一億円）の賞金を出すことにしました。7 つのうち，今のところ解決されたのはポアンカレ予想だけで，未解決の 6 つのうち，最も有名なものは，「リーマン予想」という整数に関する予想だと思います。

このように，数学の研究において，未解決問題を解く，ということは重要な役割を果たしています。では，数学者がそのために日々，問題演習を繰り返しているのかといえば，そうではありません。数学者は，多くの時間，理論について研究をしています。例えば，微積分の理論は，数百年間に数学者が創始して，徐々に整理し一定の完成を見ました。その背景には，力学や天文学がありました。その後，微積分の理論は，複素数関数や多変数関数に拡張され，電磁気学をはじめ，さまざまな応用も生み出しています。

高校生にとっての数学

いうまでもなく，高校生が数学を勉強するうえで，問題の果たす役割は，とても大きなものです。数学者は理論の修得だけに，数年を費やすことに耐えられますが，高校生に，理論だけを教えたら，数時間も経たないうちに，飽きてしまうでしょう。そもそも，数学の問題を解くことは，理解度のチェックというだけでなく，そこに本質的な喜びがあります。江戸時代には，和算という数学の伝統があり，そこでは，「算額」といって，数学の問題を広く公開し，その正解を寺社に奉納するという習慣がありました。

しかし，高校における数学の勉強が，演習問題や入試問題を解くことの一辺倒になってしまったら，数学の良さや楽しみが半減してしまうのではないか，という気もします。要は，バランスが大事なのではないでしょうか。

統計教育の導入

話は変わりますが，高校数学の履修内容をめぐるいくつかの変化があります。一つは，統計的な内容が増していることです。統計的リテラシーを身に着けることは，これからの時代を生きる生徒にとって，有益なことであると思います。統計の学習は，すでに小中学校のカリキュラムから徐々に組み込まれているわけで，生徒たちは比較的スムーズに対応するだろうと私は考えています。

そして，深い理解を可能にするという意味で，数学の一部として統計を教えることは，歓迎すべきと思います。

ただし，それには，関連する基本的な数学の知識と技能，例えば数式の取り扱い・確率・積分の理解が重要で，それなしでは，統計教育も単なるマニュアルの暗記になりかねません。それは統計教育の導入の主旨にも反すると思われます。これまでの高校数学の知識・技能に統計教育の知識が加わり，深い学びが実現できるのです。

日常の事象と数学

もう一つの大きな変化は，数学を日常的な場面で使うことを促す，それを教科の中で教えていくという点だと思います。この場合，問題を作る場合においても，状況設定からはじまり長文になりますし，そこで使う数学的技能はレベルを含め多様です。

そのため，新たな要素として，数学的な長文読解力が必要とされます。このことへ対応するには，継続的な取り組みが必要です。

しかし，数学という教科の中の取り組みだけでは，限定的な学習効果しか上がらないのではないかと感じています。現代社会の成り立ちを考えれば，このような思考法を身に着けることの価値は高く，この新しい試みが，うまく行ってほしいと考えています。

数学での取り組みに加え，他教科や他分野との融合した学びを行うことで，読解力を含む，多くの力が身に着くでしょう。

数学の知識と技能

以上のように，最近の高校数学の学習内容をみていると，これからの時代の生徒にとって，とても重要な学習内容になっていると思います。

しかし，懸念していることが一つあります。それは，このような新しい流れの中で，基本的な数学の概念や技能の理解と習熟に，十分な時間が取れるかということです。

よく言われますが，日本人の平均的な計算能力や数的理解は国際的にトップクラスです。これは，これまでの日本における算数・数学教育の成果にほかなりません。漢字の修得もそうですが，計算技能も，大人になれば自然に身に着くというものではありません。小学校の算数から時間をかけた取り組みが必須です。そして，それをこれからも確保し，成果をモニターすべきだと思います。

問題集・参考書の役割

このような状況で，これからの 20 年，何が重要か，私は次のように考えます。

高等学校数学の学習において，教科書･参考書･問題集はセットになっていることが多いわけですが，その中で，カギとなるのは，やはり教科書ではないかと思います。

というのは，参考書や問題集は，入試問題への対応を最終のゴールとして編集されていて，それに向けての最短経路を生徒に提供することを目的としていることが多いように感じます。つまり，一つ一つの要素は，マニュアル的に整理され，生徒にとってわかりやすい構成になっています。

それが参考書や問題集にとっての強みとなるのですが，目的に特化した半面，変化には弱くなるという一面もあるのではないでしょうか。

読んでわかる教科書

一方，教科書は，数学の理解そのものを目指しています。生徒一人一人が自分のペースで，場合によっては行ったり来たりしながら，個性や理解度に合わせて複線的に学習することが可能です。

つまり，教科書で数学を本質的に理解し，参考書や問題集で理解を定着させるという，それぞれの役割を効果的に活用することが重要になると思います。

さらに，教科書には，自学自習が可能な側面もあります。そして，自学自習で教科書を読む中で，自然に数学的な長文読解力も身に着きます。

「高校数学のこれからの 20 年，これからの生徒にとって…」というように，未来を考えたとき，生徒の学力や理解度に応じた「読んでわかる教科書」というのが，一層重要となってくる気がします。

特集

数学教育の理想と現実

～教科書に求めるもの～

立命館宇治高等学校教諭　酒井淳平

はじめに

理想と現実の間にはギャップがあります。このことはこれまでも当然のことでしたが，新学習指導要領の実施を直前に控え，改めて突き付けられているように思います。さらに，コロナ禍で社会が大きく変わるということを実感させられ，ICT活用は一気に進みました。GIGAスクール構想もあり，これから，社会はもちろん，学校のありかたも大きく変わっていくのだと思います。そのような中だからこそ，数学教育の現状を踏まえて，教科書や教材に求めることについて考えていきたいと思います。

授業を通じてつけたい力

「数学の授業を通じてつけたい力は何ですか。」この問いに対して，

「数学を公式にあてはめて答えを出す力」

「計算力」

と答える高校教員は少ないのではないでしょうか。

おそらく多くの教員の答えは，

「物事を論理的に考える力」

など数学的思考力といえるものや，

「難しいことに挑戦する姿勢」，

「課題を解決する力」

など物事への取り組み姿勢に関わるものではないでしょうか。

日本の高校生の実態

しかし，少し古い調査データにはなりますが，2012年のOECDによる生徒の学習到達度調査では，

「数学を数学的文脈でしか活用できない」

という日本の生徒の実態が明らかになりました。

（表1）のように，日本とOECD加盟国で問題を解く「自信がある」と答えた生徒の割合を比較したときに，日本の生徒は，

・$2(x+3)=(x+3)(x-3)$

など単なる計算問題では自信があると答える割合が高いのですが，

・新聞に掲載されたグラフを理解する

・自動車のガソリンの燃費を計算する

など，数学を実社会の文脈で活用する問題については「自信がある」と答える割合が低いのです。

つまり，数学を数学的文脈でしか使えないという実態があるのです。

（表1）　日本の生徒の現状

「かなり自信がある」「自信がある」と答えた生徒の割合

	OECD平均	日本
$3x+5=17$という等式を解く	85.2%	90.6%
$2(x+3)=(x+3)(x-3)$という等式を解く	73.1%	83.4%
あるテレビが30%引きになったときに，それがもとの値段よりいくら安くなったかを計算する	79.8%	**60.6%**
新聞に掲載されたグラフを理解する	79.5%	**54.0%**
自動車のガソリンの燃費を計算する	56.0%	**28.3%**
列車の時刻表を見て，ある場所から別の場所までどのくらい時間がかかるかを計算する	81.4%	**67.6%**

「OECD生徒の学習到達度調査～2012年調査分析資料集～」

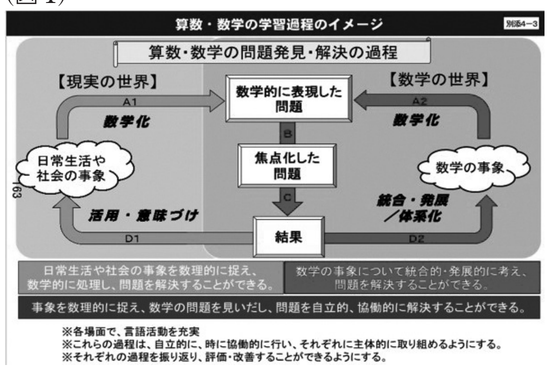
（国立教育政策研究所）

https://www.nier.go.jp/kokusai/pisa/pdf/pisa2012_reference_material.pdf

次期学習指導要領の背景

こうした実態もあり，学習指導要領改訂において算数・数学の問題発見・解決の過程が学習過程のイメージとして図で示されました（図1）。

（図1）



この背景にはこれまでの数学教育が，

「焦点化した問題」⇒「結果」

というところのみに矮小化され，数学＝問題を解くことになってしまっているという認識があります。

これまでの大学入試センター試験に代わる大学入学共通テスト（以下，共通テスト）の試行調査やプレテストも，

・日常生活を数学的に表現する

・数学的に表現した問題を焦点化する

・結果を吟味する

など，学習過程のイメージ図を意識して出題されており，この傾向は実際の共通テストにおいても同じでしょう。

文部科学省もおそらくは学力の3要素でいう「知識・技能」に偏ってしまっている現状を変えたいと思っているからこそ，共通テストでは「思考力・判断力・表現力」を問う問題を出題しようとしているのだと思います。

学力の3要素

「知識・技能」に偏ってしまっているという現状は数学に限りません。そのため，新学習指導要領では「学力の3要素」が強調され，大学入試も変わろうとしています。

「何を学ぶか」だけでなく，「どのように学ぶのか」や「何ができるようになるのか」が強調され，様々な力は特定の教科だけではなく学校全体で育てるということから「カリキュラムマネジメント」が言われています。実際，すでに学校では「探究」「ICT」「資質・能力」などいろいろな言葉が飛び交っています。

とはいえ，そもそも数学の教員が授業を通じて実現したいことを考えると，この方向は間違ってないはずです。もしかしたら，これまで理想として追い求めてきたことを実践できる時代が来たととらえることができるのかもしれません。

高校現場の現実

しかし，現実は厳しいというのも正直なところです。本校に限らず多くの学校で生徒の様子が変わってきたという声を聞きます。「素直で言われたことはやろうとする」などポジティブな面もありますが，「受け身で自分からは動かない」などネガティブに語られることも多いのが実態です。

そして，数学については，「教えてもらわないとできない生徒の増加」をよく耳にするようになり，私自身も実感しています。教えてもらうと理解する力はあるのに，自分では教科書や問題集の答えを読めないから，教えてもらわないとできるようにならないという生徒が確実に増加しているのです。

自分で理解する力はすべての学習の土台であるからこそ，この実態には不安を感じます。

また，「すぐに暗記したがる生徒の増加」ということもあります。教員側が考え方を伝えても，暗記で乗り切ろうとするのです。数学は考えることが重要だと思う，教員側の気持ちはなかなか生徒に届かないのです。

教員にとっての現実

生徒の変化について書いてきましたが，今の時代は教員にとっても大変だという本音もあります。

生徒や保護者への個別の対応，書類仕事などの業務は，年々増えています。さらに，今年度は，コロナ禍への対応もあり，仕事量がさらに増加しました。

一方，授業改善が言われ，ICTの活用や実社会の文脈で数学を活用する授業の実践などが言われますが，そのためには授業のネタが必要で教材研究など教員としても学ばなければいけないことが多くあります。

しかし，教員の年齢構成もいびつで，職場で学びあう風潮も弱くなっているような気がします。仕事に追われ学びに行く時間がどこにあるのだろうと思うときもあります。やはり現実は厳しいです。

このように，厳しい現実はありますが，これからの社会を生きていく生徒のことを考えると，授業改善が重要であることは間違いありません。

数学についていえば，計算や公式のあてはめよりも，数学的な思考力が重要で，まずは教科書を読んで自分で学習できる力を育てたいと思います。

では，どうすれば今の現実からスタートして理想に近づくことができるのでしょうか。

理想の実現へ

現実から理想への道のりは決して簡単なものではありませんが，1つ言えることがあります。

それは，教科書のもつ本来の力です。教科書はすべての生徒が購入し，教員も授業で使います。教科書を使って理想の実現に近づく授業ができれば，生徒の学び方も変わることは間違いないのではないでしょうか。

このことも踏まえると，これからの教科書に求められるものも変わってくるのではないでしょうか。個人的な見解ではありますが，以下のような教科書があればいいのではないかと考えます。

＜生徒の立場から考える＞

1) 自分で読み進めることができ，自分で学習できる。

2) 数学と社会のつながりを感じ，数学を学ぶ意味を感じることができる。

＜教員の立場から考える＞

1) 生徒の個人差に対応できる。

2) 使うと教員自身の学びや授業改善になる。

こうしたことを実現できる教科書とはどのようなものでしょうか。そのためには，教科書には何がかかれているのかを，教員が改めて認識することが大切ではないでしょうか。

理想と現実のギャップは大きい。でも生徒が学校生活の大半を過ごすのは授業であることは間違いありません。

現状から出発して少しでも理想に近づけばと思いますし，それが可能になる教科書があればと思います。

特集

教科書精読について

名城大学教授　竹内英人

はじめに

この半年の間，数学芸人である「タカタ先生」と「東大受験芸人タワシさん」と，3人で「教科書精読」という取り組みをしてきました。当初の目的は，数学が苦手なタワシさんのために一から教科書に戻って，基礎・基本を固めていこうというものでした。

しかし，実際に行っていくうちに，我々指導者にとっても，普段の授業で何気なく扱ってきたり，正しく理解していなかったりした部分など，多くの発見があり，

「指導者こそ教科書精読は有効ではないか？」

と思うようになりました。

教科書精読とは

「教科書精読」とは単に教科書を丁寧に読むということに留まりません。

教科書の一つ一つの記述について細かいところまで注意を払って，その文章の意味をじっくり味わいながら，自分の中で考察を深め，少しでも曖昧な部分があれば，仲間と徹底的に議論をして，曖昧であった部分を一つずつ明確にしていくという読み方です。

この学習方法は，一見「遠回りの学習法」に見えますが，「真の数学力を高める」ためには，実は一番の「王道の方法」であり，この方法こそが，「数学力向上のための一番の近道」だと考えるようになりました。

全国に広がる輪

この取り組みをSNSで紹介すると，全国の仲間から「教科書精読について詳しく知りたい」という言葉を沢山頂き，それ以来，定期的に「東大合格プロジェクト通信」と題して「教科書精読」の様子を全国に発信してきました。

またオンライン（zoom）を利用して，「教科書精読学習会」を開催したところ，全国から約30名ほどの先生方が参加してくださいました。

それをきっかけに，全国で「教科書精読会」の輪が広がり，現在では，愛知，東京，神奈川，長崎，福岡，熊本，鹿児島で意欲的な活動が繰り広げられています。その活動は各地区の代表によって随時SNSで報告されます。

「教科書精読」のポイント

「教科書精読」は，基本的に一つのグループ内においては同じ教科書を使い，あらかじめ決めた範囲について予習をし，お互いが疑問に思った箇所を挙げ，他のメンバーと相談しながら，その疑問を解決していくという流れになります。時間は一回につき，大体60分から90分が目安です。

半年間，「教科書精読」を続けてきた経験をもとに，「教科書精読」を実践するうえで重要なポイントをいくつか挙げておきます。

＜教科書精読のポイント＞

①楽しく活動する

②少人数（3人～5人）のグループで取り組む
（一人一人の発言する時間を十分確保するためには，この人数が最適だと思われます）

③グループで同じ教科書を使用する
（メンバーでどの教科書を使うか相談して決めます。どの教科書を使うかもポイントの一つになります）

④精読する範囲を決め，予習をして臨む
（毎回範囲を決め，予習段階で疑問点を確認して参加する）

⑤欲張らない，慌てて進めない

⑥ファシリテーター役を決める

⑦できるだけ定期的に行う。そして継続する
（我々は毎朝7：00～8：30と決めて生活の一部として取り組んでいましたが，実際は皆

さん忙しいので週に一回が標準的な開催です）

⑧どんな些細な疑問でも気軽に質問できる雰囲気を作る

（質問したら恥ずかしいという雰囲気はなくす）

⑨その場で解決できない疑問は次回までの宿題とする

（決めた範囲まで進めることをめざしましょう。ある程度の達成感も重要です）

⑩やりっぱなしで終わりではなく，その日精読した内容を振り返る機会を設ける

（可能であれば，その日の内容の問題集の課題などを宿題として精読した内容の復習に取り組みましょう）

我々は，数学が苦手なタワシさんの学力向上と，我々二人の指導力向上の二つを目的としているので，特に①，⑦，⑧を大事にしています。楽しくないと続ける事が難しくなってしまいます。そしてどんなに短い時間でもよいのでとにかく続けることが大事です。

「教科書精読」は続けることによって，より教科書の素晴らしさが見えてきます。そして続ければ続けるほど，「教科書精読」の奥深さが分かってきます。

数学が苦手な方にとっては，最初は数学の教科書を一人で読み込むということは難しく感じるかもしれません。しかし，日々続ける事によって，徐々に「正しい教科書の読み方」が分かってきます。それにつれて，だんだんと学習を深めていくことができるでしょう。

実際，我々のメンバーである数学が苦手なタワシさんも初めは教科書の内容をただ丸暗記するだけでしたが，次第に，

・数と式では，なぜ『降べきの順』に並べるのか

・なぜ 0 には次数を定義しないのか

・文字式を使う真の目的は何か

というような疑問が出るようになりました。

このように「教科書精読」では，まずは，

「疑問に持つ」

ことから始めていきましょう。

そして，より学習を深めていくためには「この部分は以前学習したあの内容に関係しているかも？」というように，それまでの既習事項と新しく出てくる内容を関連付けて系統性を意識して学んでいくことが大切です。

このような姿勢で教科書を読み進めていくと，普段の授業では何気なくスルーしている箇所にも様々な発見がある事に気付きます。

大学入学共通テスト

この「教科書精読」は，2020 年度から実施される「大学入学共通テスト」の対策にも有効だと感じています。

単なる「知識・技能」だけではなく，「その考え方や背景」などを問われる共通テストにおいては，

「なぜ？」

を大事にする「教科書精読」はまさに打ってつけの学習法の一つだと思われます。

メンバーとの話し合いで気づいた事を教科書に書きこんでいくことによって，「共通テスト」用の最高のオリジナル参考書が出来上がることでしょう。

今までのテストでは，いかに早く「解き方」（解法パターン）が思いつくかという学習が中心でした。

しかし，今回の「共通テスト」では「解き方」ではなく，「考え方」が問われます。

例えば，三角比の問題において，「どの公式を使ったら解けるか」ということよりも，「この問題は正弦定理でも解けるのに，なぜ余弦定理を使うのか？（余弦定理を使うのが自然な発想なのか？）」という視点が重要になります。

従来までのただひたすら「典型的な解法パターンを覚えるだけの勉強法」ではこのような視点は出てこないでしょう。

最後に

「教科書精読」では「何を学んだか？」以上に，「どのように学んだか？」がより重要になっています。つまり，教科書に書いてある内容を深く理解するには，数学の知識を身に付けることも大事ですが，それ以上に「学びに対する姿勢」が重要であるということです。これは，今後の AI 時代においてもとても重要な「学びの姿勢」だと思います。

初めは 3 人でスタートした「教科書精読」も，今では全国に賛同してくださる先生方がどんどん増えてきております。

「教科書精読」を通して先生方との交流も，より盛んになっており，情報共有などでますます横のつながりも増えました。

日本中の指導者が「教科書精読」に取り組むことで，授業力や発問力の向上にもつながると考えています。

また，今回の「教科書精読」を一つのきっかけに，教科書を含め，教材を一度見直すきっかけになればよいと思います。

数学における探究的な取り組み題材

これから求められる学力

学力の３要素

①基礎的・基本的な知識・技能
②これらを活用して課題を解決するための思考力・判断力・表現力
③主体的に学習に取り組む態度

について，2022年度から施行される高等学校学習指導要領では，これまで以上に重視される内容となります。また，2021年度大学入学共通テストでも，上記３要素を重視した出題となりそうです。

そのような状況の中，高等学校数学において，とくに②や③の取り組みをどうすればよいか，探究的な学習をどうすればよいか，といった課題をよく聞きます。さらに，そのような探究的な取り組みをするにあたっての問題作り，題材選びをどうすればよいかという課題もよく聞きます。

そこで，今回は，探究的な取り組みにおいて，とくに日常の話題と関連した内容を，現学習指導要領の「課題学習」(数学Ⅰ，数学A)の内容をもとに取り上げてみたいと思います。今後の学校現場における探究的な扱いの参考になれば幸いです。

探究的な取り組み(日常生活に関連して)

探究的な取り組みでは，身の回りにある具体的な課題を見つけ，その課題を解決するために，どのようにその課題に取り組んでいくかを考えていくことが重要になります。そして，数学の内容がどのように広がっていくか，どのように発展していくかを学ぶことや，さまざまな疑問に対して，数学的にどのようにアプローチするかなどを考えていくことが，探究的な取り組みといえます。

では，具体例を取り上げながら，探究的な学習の進め方の一例を紹介します。

課題の見つけ方

まず，どのような課題に取り組むかを考えます。できれば，生徒自身が，難しく考えずに，数学の学習，他教科の学習，身の回りのものに対して素朴に疑問を持ってみることが理想です。

■身の回りの課題の中には，次のようなものが考えられます。

例１　多人数でじゃんけんをするとき，効果的な方法はあるだろうか。

例２「黄金比」は，身近にもあるだろうか。

例３　マンホールの蓋はなぜ円形なのだろうか。

■課題の見つけ方は，次のようなものが考えられます。

・なぜそうなっているのか**理由**を考える。
・どういう場合が起こりえるか，こういうことができないかなど，**可能性**を考える。
・学んだことをさらに**発展**させたり，**一般化**したりする。
・どのようにすれば条件に最も適するのか，その**最適解**を探す。
・どのようにすればそのことができるのか，その**方法**を考える。
・身の回りで数学が使われているところを**探したり，調べたり**する。
・学習したことをもとに**問題を作ってみる**。
・どのようにすれば，うまく**表現**できたり，**伝えたり**できるか，その方法を考えたり調べたりする。
・どれくらいの大きさや量があるのか，**計量**したり**見積もったり**する。

前ページで取り上げたものは，次の３つに分けられます。

1.　方法を考える
2.　探す，調べる
3.　理由を考える

課題への取り組み方

疑問に思ったことの中には，本やインターネットで調べることができるものもありますが，数学の問題の場合は，自分で積極的に課題に取り組み，考えを深めることが大切です。そのため，次のように取り組んでみるとよいでしょう。

①言葉が曖昧であったりする場合には，**数学の問題としてとらえ**られるように，数学の言葉を使って表現してみる。
②例を考えたり，条件を増やして特別な場合を考えたりして，**問題を理解**し，頭の中に定着させる。このとき，条件が何で，何を知りたいのかを明確にする。図示するのも有効。
③解答への**イメージ**を持ち，大きな**方針**を立てる。このとき，以前に学習したことが活用できないかを考えることが有効。
④未知数をおいて式に表したり，詳しい図をかいたり，解けそうな形におき換えるなどして，③の方針を実行するための**方法を決定**する。
⑤④に従って**解いて**みる。
⑥⑤で得られた結果が適切であるか，**吟味**する。
⑦この活動を通じて，さらに知りたくなったこと，解く過程で生まれた**疑問や今後につなげたいこと**があれば，その都度書き留めておく。

以上のことは，生徒個人で取り組むこともできますし，グループで行う事もあります。この順番で課題に取り組む必要もありませんし，同じところを何回も繰り返したり，どこかのステップを飛ばしたり，いくつものステップを同時進行することもあります。

具体的な課題を用いた取り組み例

それでは，「**課題への取り組み方**」をもとに，ある生徒が具体的に探究的に取り組んだ例をみてみましょう。

［課題］

ある宅配会社では，宅配便の送料を下の表のように縦，横，高さの長さの合計で設定している。同じ配達料の範囲で，できるだけ大きな体積の箱を用意して送りたい。

60 cm までの長さで荷物を送る場合，縦，横，高さの長さの合計がちょうど 60 cm になるようにして送るのが，もっとも大きな体積で送ることができそうである。では，縦，横，高さの長さをどのような設定にすればよいだろうか？

基本配達料	
重量一律30kg，配達距離一律100kmまで	
荷物のサイズ(縦，横，高さの長さの合計)	配達料
60cmまで	600円
80cmまで	800円
100cmまで	1000円
120cmまで	1200円
140cmまで	1400円

［課題への取り組み］

課題の整理

縦，横，高さの長さの合計が 60 cm となる直方体のうち，体積が最大となる箱を考える。
条件：縦，横，高さの長さの合計が 60 cm になる。

①数学の問題としてとらえる。

縦，横，高さの長さの和が 60 である直方体のうち，体積が最大となるときの，辺の長さはどのようになるだろうか。

②問題を整理していく。(その1)
④わからないものを文字でおいて考える。

直方体の縦の長さを x，横の長さを y，高さを z，体積を V とすると，条件から次の式を立てることができる。

$V=xyz$，$x+y+z=60$

$(0<x<60,\ 0<y<60,\ 0<z<60)$

ここで，$x+y+z=60$ より，
$V=xy(60-x-y)$ となる。しかし，変数が x と y の2つあるため，このままでは最大値を求めることは困難であると感じた。

②問題を整理していく。(その2)
④簡単な場合におき換えて考える。

そこで，直方体を考える前に，まずは平面上の長方形で同じようなことを考えてみた。
すなわち，
「縦，横の長さの和が60である長方形のうち，面積が最大となるときの辺の長さはどのようになるだろうか。」
という疑問を考えることにした。

⑤実際に解いてみる。

長方形の縦の長さを x，横の長さを y とする。縦，横の長さの和が60のとき，この長方形の面積 S が最大となるような x，y の値を求めると，
$x+y=60$ より，$y=60-x$ であるから，

$S=xy=x(60-x)\ (0<x<60)$

となる。
したがって，

$S=-x^2+60x=-(x-30)^2+900$

よって，$x=30$ のとき，すなわち，正方形のときに面積が最大となることがわかった。

⑥得られた結果が適切か吟味してみる。

上記のことが正しいか，さらに，縦，横の長さの合計が $2a$ となる場合にも同様の結果，すなわち，正方形のときに面積が最大となることがわかった。

②問題を整理していく。(その3)
③方針をたてる。

平面で考えた場合，正方形のときに面積が最大となった。このことは直方体でも同じことがいえるのではないかと予想される。したがって，縦，横，高さの長さが同じであるとき，すなわち，立方体のときの体積が最大となると予想した。

④解けそうな形におき換える。
⑤解いてみる。

直方体の体積は

$V=xyz\ (0<x<60,\ 0<y<60,$
$0<z<60,\ x+y+z=60)$

である。そこで，$z=10$，20，30 として，未知数の文字を減らし，具体的な数値を x，y にあてはめて，変化の様子を探ってみた。
まずは $z=10$ を固定して，x，y の値を変化させると下の表のようになった。

縦 x	5	10	15	20	25	30	35
横 y	45	40	35	30	25	20	15
体積 V	2250	4000	5250	6000	6250	6000	5250

$z=20$，30 のときも同様にして，それぞれの体積を比較してみたところ，
$x=y=z=20$ となるときがやはり体積が最大となっているようであった。

⑥吟味する。

$x=y=z=20$ の場合か，もしくはその付近で体積が最大となりそうであるので，さらにこの周辺について調べてみることにした。
そこで，x，y の値を17から23まで1刻みで変化させていったところ，体積 V は次の表のようになった。

$V=xy(60-x-y)$ $(0<x<60, 0<y<60)$

y \ x	17	18	19	20	21	22	23
17	7514	7650	7752	7820	7854	7854	7820
18	7650	7776	7866	7920	7938	7920	7866
19	7752	7866	7942	7980	7980	7942	7866
20	7820	7920	7980	8000	7980	7920	7820
21	7854	7938	7980	7980	7938	7854	7728
22	7854	7920	7942	7920	7854	7744	7590
23	7820	7866	7866	7820	7728	7590	7406

このことからも，やはり一辺が20の立方体で体積が最大になることがわかった。

⑦疑問や今後につなげたいこと。

[反省と展望]
・今回は z を固定したが，固定する値を x や y にした場合も同じ結果が得られるだろうか。また，x，y の値をさらに細かく変化させていった場合にも，やはり同じような結果が得られるだろうか。
・$V=xyz\ (0<x<60,\ 0<y<60,$
$0<z<60,\ x+y+z=60)$
の最大値を計算で求めることができなかったため電卓を用いたが，計算で求めることができればより確実な結果が得られる。このような2つの変数をもつ関数の最大値を計算で求める方法はあるだろうか。
・結果を予想して電卓を用いたが，コンピュータの表計算ソフトを使って，効率良く計算できないだろうか。
上記3点については，今後考えていきたい。

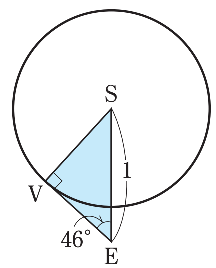
具体的な課題例

ここからは，数学の様々な内容に関する課題をいくつか紹介します。

取り組み例1 **「利益を最大にするには」**
[課題]
文化祭で焼きそばの模擬店を開き，利益を寄付することになった。利益が最大になるように販売する値段を決定したい。いくつかの条件を仮定して考えてみよう。

1個の値段を200円に設定すると300個が売れ，500円に設定すると1個も売れない見込みであると仮定する。
この仮定の下で，どのようにして販売する値段を決定するのがよいか，次のような流れで考えてみよう。
・200円，500円以外の値段にしたときに売れる個数を予測する。
・そのとき，値段に応じて売上金額や利益がどのようになるか考える。
・その結果をもとに，販売する値段を決定する。

取り組み例2 **「距離を測る」**
[課題]
星と星との距離について，星の位置を点で表し，それらを結んでできる直角三角形についての1辺と1つの内角が分かれば，三角比を使って求めることができる。
太陽の位置をS，地球の位置をE，金星の位置をVで表す。また，天文単位という距離の単位を使うと，地球と太陽の間の距離は約1天文単位である。
右の図は，ある日の太陽と金星と地球の位置関係を表したものである。このとき，金星と太陽の距離は約何天文単位か。また，この日の地球と金星の距離は約何天文単位か。



取り組み例３　**「数字並べゲーム」**

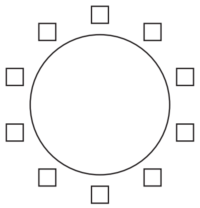
［課題］

２人で次のようなルールで数字並べゲームをするとき，相手に負けないためにはどのようにすればよいか，考えてみよう。

２人で次のようなルールでゲームを行う。

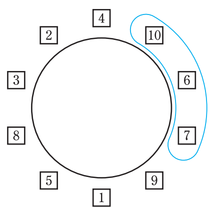
<ルール>

1. 図にある10個の□の中に，１から10までの整数を１つずつ書き込んで相手に渡す。
2. 相手が数字を書き込んだ図について隣り合う３つの数の和を計算し，その最大値を自分の得点とする。
3. 得点を比べて，多い方を勝ちとする。



たとえば，下の図を相手に渡したときは，10，6，7を選んだときに最大になるので，23点をとられてしまう。

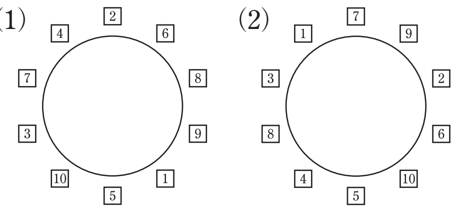
そのため，隣り合う３つの数の和の最大値が大きくならないように数字を並べて相手に渡す必要がある。



①実際にこのゲームをやってみる。

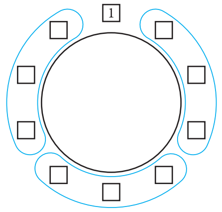
②次の図を渡したときの相手の得点を求める。

(1)　(2)



③相手の得点が20点，19点となるような図を作る。

④相手の得点が17点となるような図は作ることはできない。その理由を，次の図を参考にして考え，説明する。



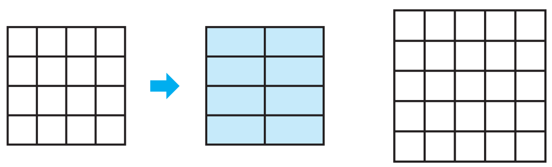
取り組み例４　**「タイルの敷き詰め」**

［課題］

1×1の正方形のマス目を縦横につなげた形の上に，1×2のタイルを隙間無く重なり無く敷き詰めたい。敷き詰めができるための条件を考える。

たとえば，次の(i)の図の場合は，同じ向きに８枚のタイルを並べて敷き詰めることができる。

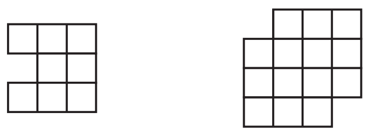
(i)　(ii)



一方，上の(ii)の図の場合のように，マス目の数が奇数のときは，1×2のタイルを敷き詰めることはできない。すなわち，1×2のタイルを敷き詰めることができるならば，マス目の数は偶数であることが分かる。

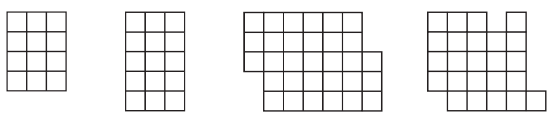
ただ，マス目の数が偶数であっても(iii)や(iv)の図のような場合は敷き詰めることができない。

(iii)　(iv)



①次のような図の場合，1×2のタイルを敷き詰めることはできるか。敷き詰めることができるものは敷き詰め方の例を示す。

(1)　(2)　(3)　(4)



②「1×2のタイルを敷き詰めることができるならば，マス目の数は偶数である」を命題としてみると，これは真の命題である。

1. 対偶を考えて，この命題が真である理由を説明する。
2. この命題の逆は偽である。この命題の逆を述べて，反例となる図を作る。

③左の(iii)や(iv)の図について，隣り合うマスが白黒交互になるように塗り分けると次のようになる。

(iii)　(iv)

この図から，命題「1×2のタイルで敷き詰めることができるならば，塗り分けたときの白マスと黒マスの数は同数である」が真であることがわかる。対偶を考えて，この命題が真である理由を説明する。

また，この命題も逆は偽である。反例となる図を作る。

取り組み例５　「誕生日が同じ人がいる確率」

［課題］

１クラスの生徒の中に同じ誕生日の２人がいる確率はそう大きくないと思われるが，実際に確率を計算してみる。

１クラスの生徒数を40人，１年を365日とし，１年のどの日に生まれることも同様に確からしいものとする。

まず，クラスの中に自分と同じ誕生日の人がいる確率を考えてみる。

①自分を除く39人の生徒の中に自分と同じ誕生日の人がいる確率を求め，累乗を使った式で表す。また，それはおよそ何％であるか，コンピュータや電卓を使って計算する。

次に，クラスの中に同じ誕生日の２人がいる確率を考えてみる。

②「40人の生徒の中に同じ誕生日の２人がいる」という事象の余事象を考える。

③40人の生徒の中に同じ誕生日の２人がいる確率を求め，累乗や階乗を使った式で表す。また，それはおよそ何％であるか，コンピュータや電卓を使って計算する。

そのほかの取り組み例

【アリバイの論理について】

テレビドラマや映画などで容疑者のアリバイを調べるということを耳にすることがある。容疑者にアリバイがあるとは，事件が起こった時刻に容疑者が別の場所にいたという事実があるということを指すが，このことからどのようなことが言えるのか，逆，裏，対偶，背理法といった論理に関する言葉を用いて説明してみる。

【与えられた条件を満たす２次関数を求める】

「頂点と通る１点」「軸と通る２点」「通る３点」の条件が与えられたら２次関数が必ず１つに定まるといえるか。

「頂点と通る１点」という条件について考えてみる。

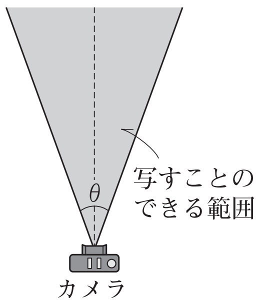
(1) 原点を頂点として，点(1，0)を通る放物線をグラフとする２次関数 $y=ax^2+bx+c$ はあるか。また，点(0，1)を通る放物線はどうだろうか。

(2) 与えられた条件として頂点の座標があるとき，さらに２次関数が１つに定まるためには，通る１点としてどのような点をとればよいだろうか。

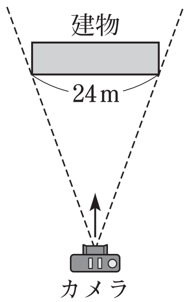
「通る３点」という条件について考えてみる。

３点の座標が与えられたとき，その３点を通る放物線をグラフとする２次関数 $y=ax^2+bx+c$ は１つに定まるか。もし定まらない場合があるとすれば，３点がどのような位置にあるときか。

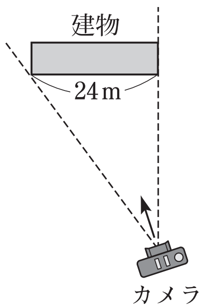
【カメラの画角】
カメラで写真を撮る場合，写すことのできる範囲はカメラの正面からどれだけの角度がついているかで定まる。このとき，下の図の θ のことをカメラの画角という。



建物全体を写真に収めたいとき，どれだけ離れなければならないか考えてみる。
(1) 画角が 40° であるカメラで横が 24 m である建物の全景を真正面から写したいとき，建物から最低どれだけ離れる必要があるか。



(2) 下の図のように，建物の右端の延長上から斜めに写すとき，どれだけ離れる必要があるか。



【試合の方式】
野球やサッカー，テニスなどスポーツの大会では，参加チームや選手どうしで試合を行い，優勝者や順位を決める。その試合の方式にはトーナメント（勝ち残り）方式やリーグ戦（総当たり）方式などがある。

(1) 一般に，n チームが参加するトーナメントでは全部で何試合行われるか。
(2) 通常のトーナメント戦では 1 回負けた時点で次に進むことはできないが，試合をする機会を増やすために，これを 2 回目に負けた時点で次に進むことができないようにする場合，どのように試合を行えばよいか。また，試合数はどうなるか。
(3) 一般に，n チームが参加して 1 回ずつ戦うリーグ戦では全部で何試合行われるか。
(4) 偶数チームでリーグ戦を行う場合，公平を期すために全チームが同一の日に試合を行うことが多い。すべての組み合わせを重複することなく行うには，どのように試合日程を決めるとよいか。

【多人数のときのじゃんけん】
何人かでじゃんけんをして勝者を決めるとき，人数が多いとあいこになることが多くて時間がかかってしまうので，次のようにルールを工夫することがある。多人数でじゃんけんをするときの効率的な方法について考えてみる。

[勝負に参加していない 1 人とじゃんけん]
　勝負に参加している n 人と勝負に参加していない 1 人がそれぞれ手を選び一斉に出す。そして，勝負に参加していない 1 人の手に勝つ手を出した人だけが勝ち残る。
[グーとパーだけを出すじゃんけん]
　n 人がグーとパーのどちらかを一斉に出し，出した人数が少なかった方の手を出した人が勝ち残る。
　あいこになる確率はどうなるか。また，勝ち残る人が m 人以下になる確率はどうなるか。n と m の値をいろいろ定めて計算し，比較してみる。
[効率的なじゃんけんの方法を考える]
　たとえば，グー，チョキ，パーのほかに手の種類を増やしたり，少人数のグループに分けたりするなど，いろいろとじゃんけんのルールを考えて，それぞれのルールでじゃんけんをする場合について，比較してみる。

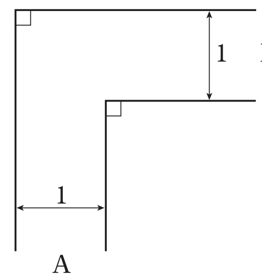
【切手の問題】
50 円切手と 80 円切手がそれぞれたくさんあるとする。郵便物に定められた料金分の切手を貼ろうとする場合，たとえば，230 円のときは 50 円切手 3 枚と 80 円切手 1 枚を貼れば料金分ちょうどになる。しかし，190 円のときは料金分ちょうどの切手を貼ることはできない。
料金分ちょうどの切手を貼ることができないのはどういう場合か考えてみる。
(1)10 円単位の金額のうち，50 円切手と 80 円切手を組み合わせてちょうど支払うことができないのはどの場合か。また，10 円単位の金額のうちちょうど支払うことができない最大の金額はあるか。
(2)30 円切手と 70 円切手の場合はどのようになるか。また，80 円切手と 120 円切手の場合はどのようになるか。
(3) 一般に，m 円切手と n 円切手がそれぞれたくさんある場合について考えてみよう。また，m と n が互いに素な自然数であるとき，ちょうど支払うことができない最大の金額を m と n の式で表してみる。

【ゲームの必勝法】
次のようなゲームについて考えてみる。

ルール 1
　1 から順番に数字を 2 人が交互に言い合う。
ルール 2
　1 度に 1 個または 2 個または 3 個の数字を言う。
ルール 3
　20 と言った（言わざるを得なくなった）方の負けとする。
このゲームの必勝法を考えてみよう。
(1) 実際に他の人と対戦してみる。そして，どのような状況になったら勝つことができるかを考える。
(2) 言うことのできる数を 4 個までとしてみたらどうなるか。
(3)20 と言った方が勝ちになるとしたらどうなるか。

【通路を通過できる図形】

　下の図のように幅が 1 の通路が L 字状にある。このとき A 地点から B 地点まで，通路の壁を突き抜けることなく通ることができる図形のうち，なるべく面積が大きいものを考えたい。ただし，次の条件をつける。
・図形は変形したり分割したりできないものとする。
・図形を立てたりひっくり返したりすることはできないものとする。すなわち，平面的に考えるものとする。



　この問題は，このような通路がある家でできるだけ面積の大きなソファを運び入れるには，どのような形であればよいかという形で出されることがある。そのため「ソファの問題」とも呼ばれる。

さいごに
　このように，いろいろな日常の内容を数学の問題としてとらえる練習は，さまざまなものがあります。ここに取り上げた内容は一例にすぎませんが，取り組み例として参考にしてください。
　そして，生徒自身の主体的な学びにつながっていくことができればと思います。

$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ の一般化

山口県立光高等学校　西元教善

1．実践の主旨

定積分の応用で，放物線と直線や放物線どうしで囲まれる図形の面積を求めることを扱うが，その際には俗に $\frac{1}{6}$ 公式（あるいは符号も含めて $-\frac{1}{6}$ 公式）と呼ばれる等式

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

を使うと便利である。

また，3次曲線とその接線で囲まれる図形の面積を求めるときには，俗に $\frac{1}{12}$ 公式（あるいは $-\frac{1}{12}$ 公式）と呼ばれる等式

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)dx=-\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

$$\left(\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)^2dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4\right)$$

を使うと便利である。

どうしてそのような等式が成り立つのかということよりも，覚えて，楽に計算ができる公式として重宝している生徒も多いが，どうして $-\frac{1}{6}$ や $\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{12}\right)$ という係数が出てくるのかに興味をもつ生徒もいる。

さらには，被積分関数の因数 $x-\alpha$，$x-\beta$ の指数に着目して，指数がさらに大きくなった

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)^3dx \text{ や } \int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)^3dx$$

などの場合にはどのようになるのか，被積分関数の指数から判断し，恐らくそれぞれ$\square(\beta-\alpha)^5$，$\square(\beta-\alpha)^6$ となるだろうと予想されるが，そのときの係数$\square$はどのようになるのか…ということに興味・関心をもつ生徒もいる。（それが普通だと思うのであるが…）

「予想する」という行為も数学活動にとって重要であり，その予想を数学的に確かめる，つまり「証明する」ことについては尚更である。

ただし，いきなり

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(x-\beta)^ndx \ (m,\ n \text{ は0以上の整数})$$

について考えろといってもレディネスがないと手の出しようがない。そこで，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$ を扱ったあとで実践してみた。

2．$I_{m,n}=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(x-\beta)^ndx$（$m$，$n$ は0以上の整数）について

多くの場合，$\frac{1}{6}$ 公式は数学Ⅱで発展や研究という形で扱ってある。少しでも計算量を減らす工夫として，放物線 $y=(x-\alpha)(x-\beta)$ と x 軸で囲まれる図形の面積はその放物線を x 軸方向に $-\alpha$ だけ平行移動した放物線 $y=x\{x-(\beta-\alpha)\}$ と x 軸で囲まれる図形の面積に等しいことを使って，$\int_0^{\beta-\alpha}x\{x-(\beta-\alpha)\}dx$ として計算させるやり方があるが，これは数学Ⅲでは「置換積分法」で扱うことになる。

数学Ⅲでは「部分積分法」を使ってもできる。そこでは発展や研究という形で，n が0以上の整数のとき，定積分，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$ を求める方法が扱ってある。

それは，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$ とおき，$n\geqq 2$ のとき部分積分法により，数列 $\{I_n\}$ において，漸化式 $I_n=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$ が成り立つことから，$I_0=\frac{\pi}{2}$，$I_1=1$ であることと合わせて，数列の一般項として定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$ が，（n の偶奇別に）求められるという方法である。

生徒にとって，定積分の値を漸化式で表された数列の一般項として求めるというのは「青天の霹靂」的な展開かもしれないが，0以上の整数 n に関わる定積分を求める常套手段の1つである。

これを扱い，その解決メカニズムを理解した後に $I_{m,n}=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(x-\beta)^ndx$（$m$，$n$ は0以上の整数）を扱うことにした。

このようにおくと，$\frac{1}{6}$ 公式は，

$I_{1,1}=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

$\frac{1}{12}$ 公式は，$I_{1,2}=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$，

$I_{2,1}=-\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$ ということになる。

ただ，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$ の場合は数学Bで扱う数列の一般項と同様なものとして受け入れられても $I_{m,n}=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(x-\beta)^ndx$（$m$, n は0以上の整数）の場合は m，n についての2重数列であり，そのため抵抗感をもたれるのは仕方ないが，なぜそのような数列を考えるのか，また，その解決のメカニズム（降下法）について $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$ の場合でしっかり押さえさせておく必要がある。

● 漸化式 $I_{m,n}=-\frac{n}{m+1}I_{m+1,n-1}$（$m$ は0以上，n は正の整数）が成り立つこと

方針は，部分積分法を適用して，$I_{m,n}$ を変形し，$I_{m,n}=\square I_{m',n'}$ の形で表すことである。

m は0以上の整数，n は正の整数のとき，

$$I_{m,n}=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(x-\beta)^ndx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\frac{(x-\alpha)^{m+1}}{m+1}\right\}'(x-\beta)^ndx$$

$$=\left[\frac{(x-\alpha)^{m+1}}{m+1}(x-\beta)^n\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$-\int_{\alpha}^{\beta}\frac{(x-\alpha)^{m+1}}{m+1}\cdot n(x-\beta)^{n-1}dx$$

$$=-\frac{n}{m+1}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m+1}(x-\beta)^{n-1}dx$$

$$=-\frac{n}{m+1}I_{m+1,n-1}$$

よって，$I_{m,n}=-\frac{n}{m+1}I_{m+1,n-1}$（$m$ は0以上，n は正の整数）……(＊)という漸化式を得る。

ここまでのことについて，次のようなマーク式問題で行う。

> 次の $\boxed{ア}$～$\boxed{オ}$ にあてはまるものを，下の⓪～⑤のうちから1つ選べ。なお，同じものを繰り返し選んでもよい。
>
> $$I_{m,n}=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(x-\beta)^ndx$$
>
> $$=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\frac{(x-\alpha)^{\boxed{ア}}}{\boxed{ア}}\right\}'(x-\beta)^ndx$$
>
> $$=\left[\frac{(x-\alpha)^{\boxed{ア}}}{\boxed{ア}}(x-\beta)^n\right]_{\alpha}^{\beta}$$
>
> $$-\int_{\alpha}^{\beta}\frac{(x-\alpha)^{\boxed{ア}}}{\boxed{ア}}\cdot\boxed{イ}(x-\beta)^{\boxed{ウ}}dx$$
>
> $$=-\frac{\boxed{イ}}{\boxed{ア}}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{\boxed{ア}}(x-\beta)^{\boxed{ウ}}dx$$
>
> $$=-\frac{\boxed{イ}}{\boxed{ア}}I_{\boxed{エ},\boxed{オ}}$$
>
> ⓪ $m-1$　① m　② $m+1$　③ $n-1$
> ④ n　⑤ $n+1$

【解】 ア②　イ④　ウ③　エ②　オ③

ポイントは部分積分法を使い，n を減じた2項間との漸化式を作るということである。（m を減じた2項間との漸化式を作ってもよい。）

これより，$I_{m,n}$ は，m については1だけ増加し，n については1だけ減少した $I_{m+1,n-1}$ の $-\frac{n}{m+1}$ 倍である $-\frac{n}{m+1}I_{m+1,n-1}$ に等しいこ

とがわかる。

● **$I_{m,n}=(-1)^n\dfrac{m!n!}{(m+n)!}\cdot\dfrac{(\beta-\alpha)^{m+n+1}}{m+n+1}$ であること**

後は，漸化式(＊)を n 回繰り返して使うことで，

$$
\begin{aligned}
I_{m,n}&=-\frac{n}{m+1}I_{m+1,n-1}\\
&=-\frac{n}{m+1}\left(-\frac{n-1}{m+2}I_{m+2,n-2}\right)\\
&=-\frac{n}{m+1}\left(-\frac{n-1}{m+2}\right)\left(-\frac{n-2}{m+3}I_{m+3,n-3}\right)\\
&=\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&=-\frac{n}{m+1}\left(-\frac{n-1}{m+2}\right)\left(-\frac{n-2}{m+3}\right)\cdots\cdots\\
&\qquad\cdots\cdots\left(-\frac{1}{m+n}\right)I_{m+n,0}\\
&=(-1)^n\frac{m!n!}{(m+n)!}I_{m+n,0}
\end{aligned}
$$

ポイントは，漸化式(＊)を n 回繰り返して使うことで，n がその都度1ずつ減少して0になることである。

$I_{m,n}=r_1I_{m+1,n-1}=r_2I_{m+2,n-2}=\cdots=r_nI_{m+n,0}$

(r_k は m, n, k の関数)と表すとき，r_n は

$$r_1=-\frac{n}{m+1},\quad r_k=r_{k-1}\left(-\frac{n-k+1}{m+k}\right)$$

$$
\begin{aligned}
r_n&=-\frac{n}{m+1}\left(-\frac{n-1}{m+2}\right)\left(-\frac{n-2}{m+3}\right)\cdots\left(-\frac{1}{m+n}\right)\\
&=(-1)^n\frac{n!}{\dfrac{(m+n)!}{m!}}\\
&=(-1)^n\frac{m!n!}{(m+n)!}
\end{aligned}
$$

となる。

また，$I_{m+n,0}$ では，被積分関数の因数 $x-\beta$ の指数が0になるから，次のように定積分の計算が楽にできる。(これが式変形のねらいである。)

$$
\begin{aligned}
I_{m+n,0}&=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+n}(x-\beta)^0dx\\
&=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+n}dx\\
&=\left[\frac{(x-\alpha)^{m+n+1}}{m+n+1}\right]_\alpha^\beta\\
&=\frac{(\beta-\alpha)^{m+n+1}}{m+n+1}
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
I_{m,n}&=(-1)^n\frac{m!n!}{(m+n)!}\cdot\frac{(\beta-\alpha)^{m+n+1}}{m+n+1}\\
&=(-1)^n\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}\cdots(※)
\end{aligned}
$$

ここまでのことについても，次のようなマーク式問題で行う。

> 次の $\boxed{セ}$～$\boxed{テ}$ にあてはまるものを，下の⓪～⑧のうちから1つ選べ。なお，同じものを繰り返し選んでもよい。
>
> $$
\begin{aligned}
I_{m,n}&=-\frac{\boxed{イ}}{\boxed{ア}}I_{\boxed{エ},\boxed{オ}}\\
&=-\frac{\boxed{イ}}{\boxed{ア}}\left(-\frac{n-\boxed{カ}}{m+\boxed{キ}}I_{m+\boxed{ク},n-\boxed{ケ}}\right)\\
&=-\frac{\boxed{イ}}{\boxed{ア}}\left(-\frac{n-\boxed{カ}}{m+\boxed{キ}}\right)\\
&\qquad\times\left(-\frac{n-\boxed{コ}}{m+\boxed{サ}}I_{m+\boxed{シ},n-\boxed{ス}}\right)\\
&=\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&=-\frac{\boxed{イ}}{\boxed{ア}}\left(-\frac{n-\boxed{カ}}{m+\boxed{キ}}\right)\\
&\qquad\times\left(-\frac{n-\boxed{コ}}{m+\boxed{サ}}\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{\boxed{セ}}\right)I_{\boxed{ソ},0}\\
&=(-1)^{\boxed{タ}}\frac{\boxed{チ}!\boxed{ツ}!}{(\boxed{セ})!}I_{\boxed{ソ},0}
\end{aligned}
$$
>
> また，$I_{\boxed{ソ},0}=\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^{\boxed{ソ}}dx$
>
> $$=\frac{(\beta-\alpha)^{\boxed{テ}}}{\boxed{テ}}$$
>
> であるから，
>
> $$
\begin{aligned}
I_{m,n}&=(-1)^{\boxed{タ}}\frac{\boxed{チ}!\boxed{ツ}!}{(\boxed{セ})!}\cdot\frac{(\beta-\alpha)^{\boxed{テ}}}{\boxed{テ}}\\
&=(-1)^{\boxed{タ}}\frac{\boxed{チ}!\boxed{ツ}!}{(\boxed{テ})!}\cdot(\beta-\alpha)^{\boxed{テ}}
\end{aligned}
$$
>
> ⓪ $m-1$　① m　② $m+1$　③ $n-1$
> ④ n　⑤ $n+1$　⑥ $m+n-1$　⑦ $m+n$
> ⑧ $m+n+1$

【解】　カ1　キ2　ク2　ケ2　コ2
サ3　シ3　ス3　セ⑦　ソ⑦
タ④　チ①　ツ④　テ⑧
(チ④　ツ①でもよい)

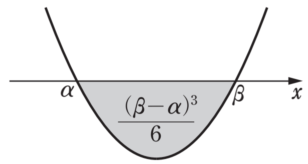
(※)において，m，n にいくつかの具体的な整数値を代入して，計算してみる。

$(m,\ n)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$ の場合について，グラフとともに列挙する。

$(m,\ n)=(1,\ 1)$ は被積分関数が2次関数のとき，$(m,\ n)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$ は被積分関数が3次関数のとき，$(m,\ n)=(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$ は被積分関数が4次関数のときである。

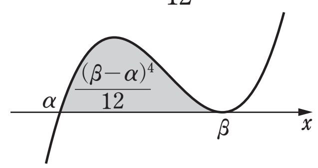
$m=n=1$ のとき

$$
\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx&=I_{1,1}\\
&=(-1)^1\frac{1!1!}{3!}(\beta-\alpha)^3\\
&=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}
$$



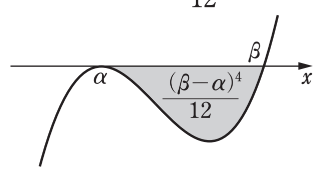
$m=1$，$n=2$ のとき

$$
\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)^2dx&=I_{1,2}\\
&=(-1)^2\frac{1!2!}{4!}(\beta-\alpha)^4\\
&=\frac{2}{24}(\beta-\alpha)^4\\
&=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4
\end{aligned}
$$



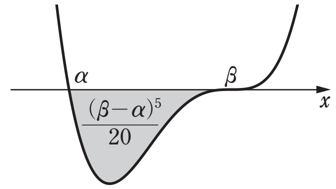
$m=2$，$n=1$ のとき

$$
\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2(x-\beta)dx&=I_{2,1}\\
&=(-1)^1\frac{2!1!}{4!}(\beta-\alpha)^4\\
&=-\frac{2}{24}(\beta-\alpha)^4\\
&=-\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4
\end{aligned}
$$



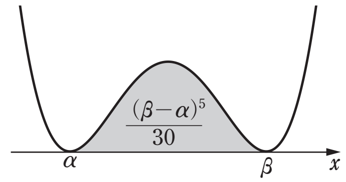
$m=1$，$n=3$ のとき

$$
\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)^3dx&=I_{1,3}\\
&=(-1)^3\frac{1!3!}{5!}(\beta-\alpha)^5\\
&=-\frac{6}{120}(\beta-\alpha)^5\\
&=-\frac{1}{20}(\beta-\alpha)^5
\end{aligned}
$$



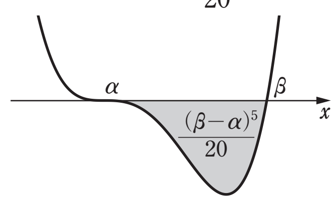
$m=n=2$ のとき

$$
\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2(x-\beta)^2dx&=I_{2,2}\\
&=(-1)^2\frac{2!2!}{5!}(\beta-\alpha)^5\\
&=\frac{4}{120}(\beta-\alpha)^5\\
&=\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5
\end{aligned}
$$



$m=3$，$n=1$ のとき

$$
\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^3(x-\beta)dx&=I_{3,1}\\
&=(-1)^1\frac{3!1!}{5!}(\beta-\alpha)^5\\
&=-\frac{6}{120}(\beta-\alpha)^5\\
&=-\frac{1}{20}(\beta-\alpha)^5
\end{aligned}
$$



n が奇数であれば，マイナス(−)が付くことに注意しておく。マイナス(−)が付くときは，$\alpha\leqq x\leqq\beta$ でその n 次曲線は x 軸の下方にある。

(※)を公式としてまとめておく。

$\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$ 公式と呼ぶことにする。

$\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$ 公式

m，n を 0 以上の整数とするとき，

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx$$
$$=(-1)^n\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

3. $\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$ 公式の応用

たとえば，次のような 2 つの面積に関わる証明問題を考える。

(1) 4 次曲線 $y=(x-\alpha)^3(x-\beta)$ と x 軸で囲まれた部分の面積と 4 次曲線 $y=(x-\alpha)(x-\beta)^3$ と x 軸で囲まれた部分の面積は等しいことを証明せよ。

(2) 4 次曲線 $y=(x-\alpha)^3(x-\beta)$ と x 軸で囲まれた部分の面積は 4 次曲線 $y=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ と x 軸で囲まれた部分の面積の $\frac{3}{2}$ 倍であることを証明せよ。

(3) n を自然数とするとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\int_\alpha^\beta\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}^n dx=\frac{(-1)^n(n!)^2}{(2n+1)!}(\beta-\alpha)^{2n+1}$$

(4) 放物線 $y=x^2+px+q$ が x 軸と異なる 2 点で交わるとき，$2n$ 次曲線 $y=(x^2+px+q)^n$ と x 軸で囲まれる図形の面積は

$$\frac{(-1)^n(n!)^2}{(2n+1)!}(p^2-4q)^{n+\frac{1}{2}}$$

であることを証明せよ。

(1)の証明

$\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$ 公式より，$|I_{3,1}|=|I_{1,3}|$ であることを示せばよい。

$(m,\ n)=(3,\ 1)$，$(1,\ 3)$ であるから，n は奇数で $m!n!=3!1!=6$，$m+n+1=5$ であるから

$|I_{3,1}|=|I_{1,3}|=\frac{6}{5!}(\beta-\alpha)^5=\frac{1}{20}(\beta-\alpha)^5$ ■

(2)の証明

$(m,\ n)=(2,\ 2)$ であるから，n は偶数で $m!n!=2!2!=4$，$m+n+1=5$ であるから

$\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$ 公式より，

4 次曲線 $y=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ と x 軸で囲まれた部分の面積は $I_{2,2}=\frac{4}{5!}(\beta-\alpha)^5=\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5$

よって，4 次曲線 $y=(x-\alpha)^3(x-\beta)$ と x 軸で囲まれた部分の面積は 4 次曲線 $y=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ と x 軸で囲まれた部分の面積の $\dfrac{\frac{1}{20}(\beta-\alpha)^5}{\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5}=\frac{3}{2}$ 倍である。■

(3)の証明

$$\int_\alpha^\beta\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}^n dx=\int_\alpha^\beta\{(x-\alpha)(x-\beta)\}^n dx$$
$$=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^n(x-\beta)^n dx$$

である。ここで，$m=n$ として $\frac{m\quad !n!}{(m+n+1)!}$ 公式を適用すると

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^n(x-\beta)^n dx=(-1)^n\frac{n!n!}{(n+n+1)!}(\beta-\alpha)^{n+n+1}$$
$$=\frac{(-1)^n(n!)^2}{(2n+1)!}(\beta-\alpha)^{2n+1}$$

であるから

$\int_\alpha^\beta\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}^n dx=\frac{(-1)^n(n!)^2}{(2n+1)!}(\beta-\alpha)^{2n+1}$ ■

(4)の証明

放物線 $y=x^2+px+q$ が x 軸と異なる 2 点で交わることから 2 次方程式 $x^2+px+q=0$ の判別式を D とすると $D>0$ であるから $D=p^2-4q>0$ である。

放物線 $y=x^2+px+q$ が x 軸と異なる 2 点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ $(\alpha<\beta)$ で交わるとすると解と係数の関係から $\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=q$ であるから

$(x^2+px+q)^n=\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}^n$

求める面積は $\int_\alpha^\beta\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}^n dx$ であるから(3)を適用すると，$\frac{(-1)^n(n!)^2}{(2n+1)!}(\beta-\alpha)^{2n+1}$ である。

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-p)^2-4q=p^2-4q$ であるから

$$\frac{(-1)^n(n!)^2}{(2n+1)!}(\beta-\alpha)^{2n+1}=\frac{(-1)^n(n!)^2}{(2n+1)!}\{(\beta-\alpha)^2\}^{n+\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{(-1)^n(n!)^2}{(2n+1)!}(p^2-4q)^{n+\frac{1}{2}}$$

よって，放物線 $y=x^2+px+q$ が x 軸と異なる 2 点で交わるとき，$2n$ 次曲線 $y=(x^2+px+q)^n$ と x 軸で囲まれる図形の面積は $\frac{(-1)^n(n!)^2}{(2n+1)!}(p^2-4q)^{n+\frac{1}{2}}$ である。■

4. まとめ

高校で扱う n 次曲線はせいぜい $n=2$〜4 であるから，その n 次曲線と x 軸で囲まれる図形の面積については，$n=2$ のときは $\frac{1}{6}$ 公式，

$n=3$ のときは $\frac{1}{12}$ 公式，

$n=4$ のときは $\frac{1}{20}$ 公式，$\frac{1}{30}$ 公式

を覚えて，使えればよいのかもしれない。

ただ，人間というのはいくつかの事例を目にすると一般にはどうなるのであろうかという知的好奇心が湧いてくるものである。その好奇心の芽を摘むことなく適切な指導を行って，生徒の数学力を伸長させたいものである。

ここで扱った内容は教科書の発展や研究よりも少し上のレベルになるかもしれないが，入試問題としては標準レベルである。数学Ⅲの内容であるから，センター試験では出題されないが，私大の数学Ⅲのマーク式問題の対策として手頃な問題であろう。

指導力・授業力をアップさせ，授業スタイルの幅を広げてみませんか？

「これまでの高校数学の授業のよさ」と
「これからの高校数学に必要なこと」をまとめた１冊

B5 判・1 色刷

授業力をみがく
−高校数学編−

256 頁　定価 3,850 円（本体 3,500 円）

- point 1　授業の組み立て方や考え方を **Q&A 方式**で解説
- point 2　高校数学の内容について生徒がもつ疑問を中心に解説

シチュエーションによって使い分けられる 2 部構成

第 1 部　授業の組み立て方

- 授業前，授業中，授業の後といったさまざまなシチュエーション（25項目）で授業を組み立てるための考え方やコツを解説。
- 実際に起こりうる場面を，経験の浅い先生と経験豊富な先生の会話で再現。「自分だったらどうするか」を考えながら読み進めていくことができる展開。

第 2 部　数学の内容の指導について

- 生徒がつまずきやすい内容，生徒に理解・定着させにくい内容を中心に50項目の内容で構成。
- 導入から応用まで，どこにポイントをおいて指導するかなど，指導者側の視点にたった内容解説。

「授業力をみがく」シリーズは，啓林館 WEB ショップでご購入いただけます。
小中高と取り揃えていますので，ぜひご検討ください。

http://keirin.shop29.makeshop.jp/smartphone/

Focus series SNS始めます。 2020年6月開始

生徒のみなさまの学習を支援する情報をお届けします。　Instagram　#FocusGold数学

―― 知が啓く。――
啓林館
https://www.shinko-keirin.co.jp/
令和3（2021）学参 内容解説資料

本　　　社	〒543-0052 大阪市天王寺区大道4丁目3番25号	TEL（06）6779-1531　FAX（06）6779-5011
東京支社	〒113-0023 東京都文京区向丘2丁目3番10号	TEL（03）3814-2151　FAX（03）3814-2159
北海道支社	〒060-0062 札幌市中央区南二条西9丁目1番2号サンケン札幌ビル1階	TEL（011）271-2022　FAX（011）271-2023
東海支社	〒460-0002 名古屋市中区丸の内1丁目15番20号 ie丸の内ビルディング1階	TEL（052）231-0125　FAX（052）231-0055
広島支社	〒732-0052 広島市東区光町1丁目7番11号広島CDビル5階	TEL（082）261-7246　FAX（082）261-5400
九州支社	〒810-0022 福岡市中央区薬院1丁目5番6号ハイヒルズビル5階	TEL（092）725-6677　FAX（092）725-6680