問題４ の全体講評

問題 4 については，30 名の応募者から 35 件の別解が集まりました。力作もかなりあり，選定はきわめて困難であったことをご報告しておきたいと思います。解答方法を大まかに分類しますと以下のようになります。

① ベクトルあるいは空間座標を導入して，解析幾何学的に解答したもの。したがって計算主体の解法です。
② 辺を延長する，あるいは補助線を引くなどにより，初等幾何的（とくに相似比に注目）に解答したもの。ただし後半，とくに最大値などは解析的手法に持ち込んだもの。
③ 平面と平面，平面と直線の位置関係を明確にすることで，図形的に最小値，最大値を得る状況を見出したもの。

なお，解答数の比は，大雑把に言うと，①②③の順に，2：6：3 でした。ただし，その多くは完全に区別がつくようなものではなく，解答の中には①②③の手法が合流，変形する場合なども見られました。

①については，よくもまあ上手く補助線を引いて考えられたなぁと感心するとともに，その反面，少し解答が複雑になってしまう解答が見受けられました。結果として，最後まで初等幾何学的に結論を導くことが難しくなり，2 次関数の最大最小問題に帰着するものが多いという印象を受けました。

②の解答は，議論のなかに初等幾何学的観点を取り入れるなどの工夫がされていたものの，最初にお示ししたベクトルによる解答例と本質的に類似のものであるといえます。

③は，期待されるもっともすぐれた解答だと思いますので，その概要をご紹介しておきたく思います。

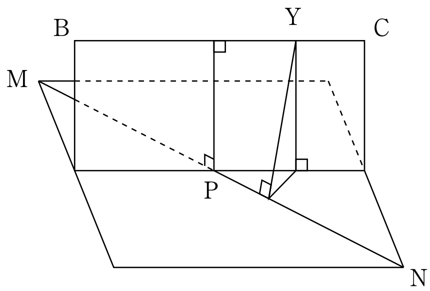
4 点 X，M，N，Y が同一平面上にあるための必要十分条件は，対角線 MN と XY が交わることである。線分 XY は平面 DEBC 上にあるので，対角線 MN と XY が交わるならばその交点は線分 MN と平面 DEBC の交点である。そこで，たとえば立方体を面 ABFE に正射影（正射影により比は保たれる）して考えれば，上記の交点は線分 MN の中点であることがわかる。したがって，4 点 X，M，N，Y が同一平面上にあるためには，線分 XY が線分 MN の中点を通ることが必要十分である。

いま，この点を P とする。簡単な考察により，点 P は線分 XY を 1:3 に内分することがわかる。したがって，△XMY の面積は△MYP の面積の $\dfrac{4}{3}$ 倍である。よって，△XMY の面積が最小（最大）になるのは，点 Y と直線 MN との距離が最小（最大）のときである。

最小値：直線 PY が，ねじれの位置にある 2 直線 MN と BC の両方に垂直なときに最短距離を与える。

最大値：Y が頂点 B あるいは C にあるときが距離最大であることを三平方の定理から示す。

これら，最大・最小をとる点がわかれば，最大最小値を計算するのは三平方の定理を利用するのみである。



（九州大学教授・若山　正人）