問題 3 の全体講評

多くのご熱心な答案を見せていただき，感動いたしました。この問題でかなり楽しんでいただけたようで，ホッといたしました。

それぞれにいろいろな計算の工夫をしたり，図形的な考察を重ねたりしたすぐれた別解がありました。

また，「点 P の座標を $(x,\ y,\ 0)$ としても一般性を失わない」とか「点 Q が xy 平面上にあるとしても一般性を失わない」などという別解もありましたが，結果的には大円を考えることになるので，正しい答えは得ることができるものの，この一般性があることを論証しなければならないと思います。軸の周りの回転をするのですから，座標軸のとり方は任意ではないからです。

さて，この問題の作問の背景について少し述べておきます。

空間において，原点を通る直線を軸とする回転移動や原点を通る平面に関する面対称移動は，図形をそれと合同な図形に移す変換になります。これらを合わせて直交変換ということがあります。平面においては，原点の周りの回転や原点を通る直線に関する線対称移動を合わせて直交変換です。いずれにしても，直交変換どうしの合成変換は直交変換になります。

平面上の原点を中心とする回転は，360° の整数倍の角度の回転を除いて，原点以外の不動点はありません。しかし，空間においては，原点を通る直線を軸とする回転で，回転軸上の点は不動点となります。そこで，原点以外の不動点をひとつ求めることができれば，その点と原点を結ぶ直線が不動点の集合となります。

不動点をひとつ見つければいいのです。例えば，$P_0\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ を x 軸を軸として 60° 回転して得られる点は $Q_0\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$，さらにこれを y 軸を軸として 60° 回転して得られる点は $R_0\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ となり，P_0（$=R_0$）は不動点であることが示されました。

この例では正三角形をイメージして座標を見つけました。

不動点に注目することは実は出題時につけた「大竹先生からのメッセージ」にヒントとして隠されていたのです。「平面上の 1 次変換を把握するときと同じように，空間でも全体を見ることである点についての情報が得られることもあれば，特別な点を考察することによって全体がわかることもあります。2 点間の距離が最小になるときを考察するのも興味深いですね。」から 2 点の間の距離が 0（もちろん最小）になる点，つまり，不動点に注目して考察してくださった先生方もおられたことと思います。

最後に，力作をお送りくださった先生方に感謝いたします。私も，大いに勉強になりました。そして大いに楽しみました。先生方の別解から本当に数学を楽しんでいらっしゃるご様子が伺え，連帯感（？）を感じた次第です。

（学校法人河合塾専任講師・大竹　真一）