問題 1 の全体講評

応募された別解は 10 件（応募者数に同じ），そのうち 8 件を正解と認めました。あとの 2 件は問題文の誤解により，別解ではなく「別問の解」になっていました。問題文の表現を，「各面に対して三角形の頂点と対辺の中点を結ぶ線分を 1 本，そしてただ 1 本引く」とでもすれば，まずそのような誤解はなかったでしょうが。ともあれ，まず解答例の考え方を復習しておきたいと思います。この解答の基礎には，正 4 面体をそれ自身にうつす回転が，回転の軸の選び方によって 2 種類に分けられる，という事実があります。解答はこれを元にして，与えられた模様の種類を対称性の高いものから順番に数え上げていきました。その中で，「部分群の位数は群の位数の約数である」というラグランジュの定理もこっそり使っています。そもそも議論の基礎をこういうところにおくということ自体に数学の大きな意味があるわけですが，正 4 面体のような具体的な対象については，中高生向きであれば特に，もっと直観的で親しみやすい解答が望まれるところでしょう。ただし教育の場ではそのような解答を通じてでも，数学的に厳密な検証というものの雰囲気を伝えていくことが大切だと思います。

さて正解のパターンですが，多かったのは頂点に集まる線分の本数に注目して数えるもので，これが 5 件ありました（佐藤大志（明徳学園相洋），ほか 4 名の先生）。線分の本数の組合せとしては，（3，1，0，0），（2，2，0，0），（2，1，1，0），（1，1，1，1）の 4 通りの可能性があり，それぞれについて当てはまる模様を列挙していけば，9 通りの模様をすべて重複することなしに数え尽くす作業は難しくありません。ただし，ここでは本数の組合せを列挙するときに，4 という自然数を 3 以下のいくつかの自然数の和に分割する仕方を数えていることに触れていただければもっと良かったと思います。あと，微妙なところですが，組合せが（2，2，0，0）の場合，2 本の線分が集まる頂点を一つ固定した状態で模様を数え上げるとき，そのような頂点は 2 つあるわけですから，それらを入れ替える回転の効果を吟味する必要が生じます。佐藤先生の解答はこのような点にも注意が払われているので，このグループの代表としてふさわしいものと考えました。寶木道郎先生（岡山白陵）の解答は，一つの辺に集まる線分の数に注目したものでした。この場合でも，2 本の線分が集まる辺が 2 つある場合の吟味があればもっと良かったと思いますが，同種の解答がなかったこととわかりやすく書かれている点を評価して，銅賞とさせていただきます。

残りの 2 件の正解は 4 本の線分の全体的なつながり方によって模様を分類するもので，いわばトポロジー的な原理に基礎をおいた解答です（柴田伸夫（小樽商），林一彦（京都伏見工）の二先生）。出題者としてはこの発想を高く評価したいところです。というのも，たとえば正 20 面体の各面に同じように線分を引いて作った模様を区別するのに，頂点のまわりに集まる線分の本数を 20 回数えるのと，線分をなぞりながら連結成分の個数を数えるのとでは，後者がずっと楽だからです（もちろん模様にもよりますが）。発想が良くてもそれを実行する手続きが煩雑では困りますが，幸い柴田先生の解答はよく整理されており，金賞にふさわしいものと判断しました。林先生の解答は，線分のつながり方に線分の両端の性質（頂点か垂線の足かの区別）を追加したもののリストから出発したため，ちょっと込み入ったものになりましたが，発想のおもしろさを評価して銅賞とさせていただきました。

（名古屋大学教授・大沢　健夫）