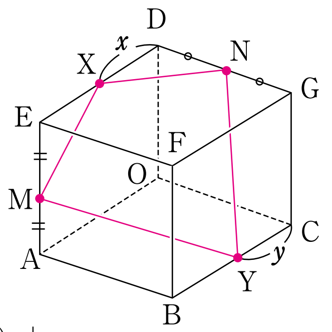
4 啓林館高校数学教科書著者　若山正人先生が選んだ1問

問　題

1辺の長さが1の立方体OABC−DEFGにおいて，辺AE，DGの中点をそれぞれM，Nとする。辺DE上の点Xと辺BC上の点Yが4点X，M，Y，Nが同一平面上にあるように動くとき，△XMYの面積の最大値，最小値を求めよ。

[2005年度 九州大学・理を改題]

解　答



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{d}$ とおく。$DX=x$，$CY=y$とおくと，

$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$ このとき，

$\overrightarrow{OM}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d}$，　$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}$，　$\overrightarrow{OX}=x\vec{a}+\vec{d}$，　$\overrightarrow{OY}=y\vec{a}+\vec{c}$

「4点X，M，Y，Nが同一平面上にある」

⇕

「Yが3点X，M，Nが定める平面上にある」

⇕

「$\overrightarrow{OY}=s\overrightarrow{OM}+t\overrightarrow{ON}+u\overrightarrow{OX}$ ……①（$s+t+u=1$……②なる実数s，t，uが存在する）」

と言いかえられる。

①より，$y\vec{a}+\vec{c}=s\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d}\right)+t\left(\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)+u\left(x\vec{a}+\vec{d}\right)$

4点O，A，C，Dは同一平面上にないので，$\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ は一次独立であるから，

$$y=s+xu\cdots\cdots③\qquad 1=\frac{1}{2}t\cdots\cdots④\qquad 0=\frac{1}{2}s+t+u\cdots\cdots⑤$$

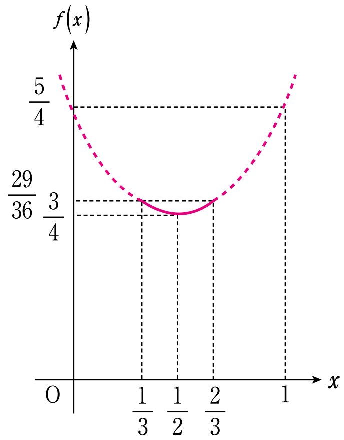
②，④，⑤より，$t=2$，$s=2$，$u=-3$

したがって，③より，4点X，M，Y，Nが同一平面上にあるための必要十分条件は$y=2-3x$が成立することである。

△XMYの面積は，$\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{MX}\right|^2\left|\overrightarrow{MY}\right|^2-\left(\overrightarrow{MX}\cdot\overrightarrow{MY}\right)^2}$ で与えられるので，

xの関数 $f(x)=\left|\overrightarrow{MX}\right|^2\left|\overrightarrow{MY}\right|^2-\left(\overrightarrow{MX}\cdot\overrightarrow{MY}\right)^2$ の最大，最小を考える。

$$\overrightarrow{MX}=\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OM}=(x-1)\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d}\qquad \overrightarrow{MY}=\overrightarrow{OY}-\overrightarrow{OM}=(y-1)\vec{a}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{d}$$



$\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ は互いに直交する単位ベクトルであるから，

$$\left|\overrightarrow{MX}\right|^2=(x-1)^2+\frac{1}{4}$$

$$\left|\overrightarrow{MY}\right|^2=(y-1)^2+1+\frac{1}{4}=(1-3x)^2+\frac{5}{4}$$

$$\overrightarrow{MX}\cdot\overrightarrow{MY}=(x-1)(y-1)-\frac{1}{4}=(x-1)(1-3x)-\frac{1}{4}$$

したがって，

$$\begin{aligned}f(x)&=\left\{(x-1)^2+\frac{1}{4}\right\}\left\{(1-3x)^2+\frac{5}{4}\right\}-\left\{(x-1)(1-3x)-\frac{1}{4}\right\}^2\\&=\left(x^2-2x+\frac{5}{4}\right)\left(9x^2-6x+\frac{9}{4}\right)-\left(-3x^2+4x-\frac{5}{4}\right)^2\\&=2x^2-2x+\frac{5}{4}=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\end{aligned}$$

ここで，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y=2-3x\leqq 1$より，$\frac{1}{3}\leqq x\leqq\frac{2}{3}$

だから，$f(x)$は$x=\frac{1}{2}$のとき最小値$\frac{3}{4}$，　$x=\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$のとき最大値$\frac{29}{36}$をとる。

よって，△XMYの面積は，

X，Yがそれぞれ辺DE，BCの中点のとき最小で最小値$\frac{\sqrt{3}}{4}$，

Xが辺DEの3等分点のDに近い方にありY＝Bのとき，あるいは

Xが辺DEの3等分点のDに遠い方にありY＝Cのとき最大で最大値 $\frac{\sqrt{29}}{12}$ をとる。